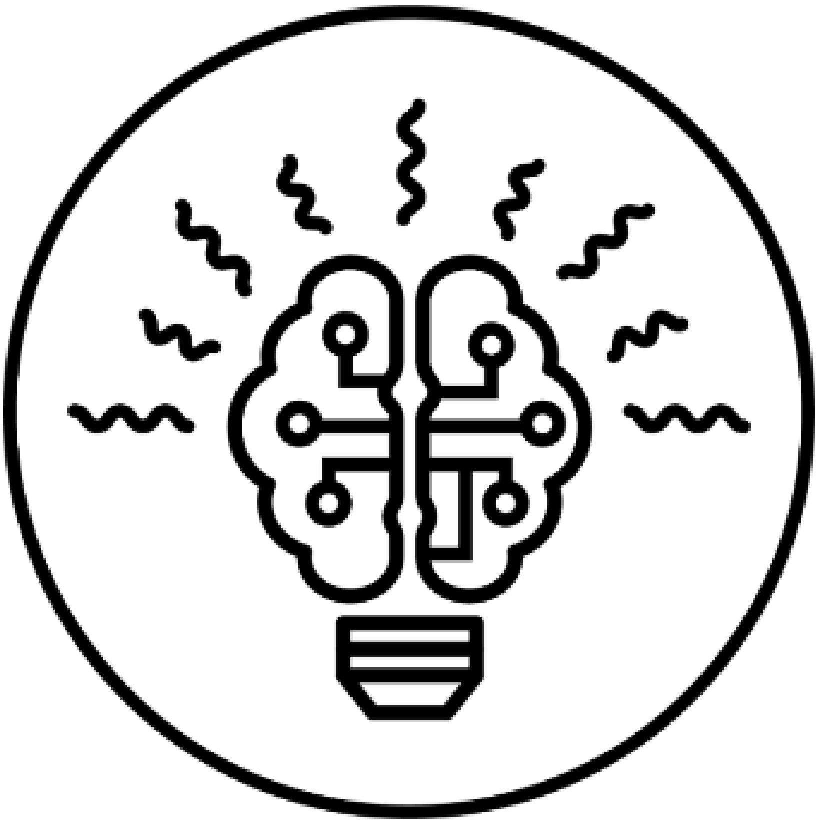
DA ÅBEN VIRKSOMHED

Foreningen af Rådgivende Ingeniører FRI

MATERIALESAMLING

MATEMATIK PÅ C-NIVEAU

BÆREDYGTIGT BYGGERI GENNEM MATEMATIK



Materialet er udviklet af

Finn Grønne Kristensen, Silkeborg Gymnasium

Emil Falkner Sørensen, Skanderborg Gymnasium

Foreningen af Rådgivende Ingeniører (FRI) og

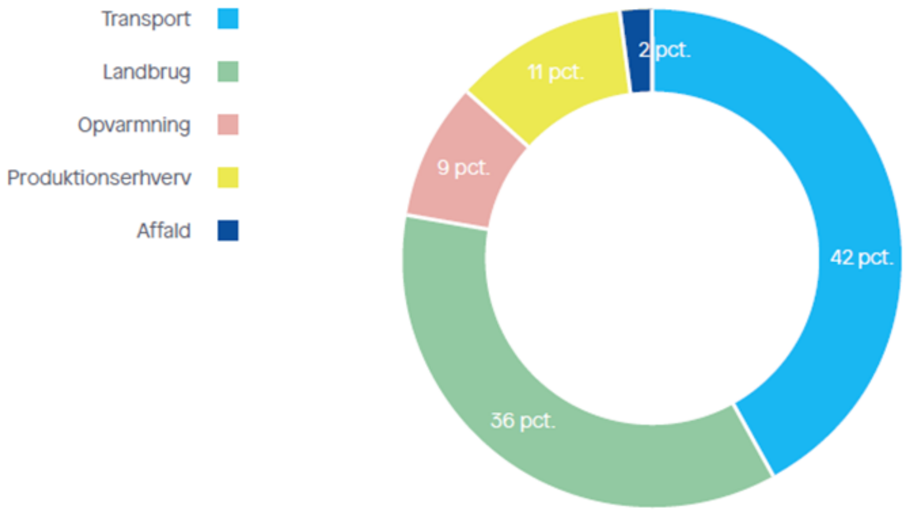
DA Åben Virksomhed

INDHOLD

Afsnit 1 Introlektion - arealer og voluminer

Introduktion

Klimaet og den globale opvarmning er blevet vigtige og ofte debatterede emner i de seneste år. Mange arbejder på at bidrage til at reducere den globale opvarmning. Et sted, hvor der kan opnås reduktion i udledningen af CO_2, er ved opvarmning og nedkøling af boliger. Klimarådet angiver, at ca. 9 pct. af klimagasserne stammer fra opvarmning.



Figur 1: Klimarådets illustration af, hvor klimagasserne stammer fra

Der findes mange muligheder for at reducere varmeforbruget i boliger og dermed for at reducere udledningen af CO_2. Man kan f.eks. nævne isolering af boligen og brug af varmekilder, der udleder mindre CO_2.

Dette undervisningsforløb har fokus på et andet aspekt, som ligeledes har betydning for varmeforbruget i en bolig: Dimensionerne af boligen har også indvirkning på varmeforbruget. Størrelsen af boligen gør en forskel, og arealet af vægge og loft/tag bestemmer i høj grad, hvor stort varmetabet er til omgivelserne. Det vil vise sig, at der er forskel på, hvor stort arealet af vægge og lofter er i forhold til gulvarealet eller det indendørs rumfang af boligen.

Det er målet med forløbet ved hjælp af matematiske metoder at finde frem til, hvilke dimensioner på en bolig, der giver det mindste varmetab til omgivelserne.

Indledende overvejelser:

- Hvordan er boliger I det område, hvor I bor, dimensioneret? Er boligernes grundplan aflangt, rundt, kvadratisk…?
- Er der gode årsager til, at boliger ofte har bestemte dimensioner? Forsøg at finde frem til så mange årsager til det som muligt.
- Find eksempler på bygninger ud i verden, som ikke har de traditionelle dimensioner.
- Kom med bud på dimensioner, der muligvis vil være bedre, når vi vil lægge vægt på varmetabet fra boligen til omgivelserne.

Introopgave
Denne opgave kan fungere som appetitvækker til undervisningsforløbet. Her introduceres nogle af de metoder, der fører frem til optimale arealer af figurer.

- I skal arbejde sammen 2-3 elever i grupper om opgaven.
- I har følgende materialer til rådighed: Et ark karton i A3-format, en saks, en lineal og tape.
- I skal folde en bygning af karton, hvor I skal arbejde på at opnå et gulvareal, der er så stort som muligt. Bygning skal være lukket, hvilket vil sige, at der ikke må mangle en væg eller tag. Der skal ikke være gulv i bygningen, og den skal have fladt tag. Der skal være mindst 5 cm fra gulv til loft i bygningen. I må klippe så meget i A3-arket, som I vil. Bygningen skal kunne stå selv.
- Start opgaven med at finde idéer til udformning. I må gerne skitsere på papir, hvordan bygningen kunne se ud.
- Når I har konstrueret jeres bygning, skal I sammenligne den med de andre gruppers bygninger. Hvem har fundet frem til de dimensioner, der giver det største gulvareal i bygningen?

Arealer og voluminer
Målet med denne del er, at du skal opnå forståelse for, hvordan dimensionerne for geometriske figurer ændrer sig, når man ændrer på nogle variable i areal- og volumenformlerne. Samtidig får du grundlæggende færdigheder i GeoGebras 3D-værktøj.

<u>Opgaver med GeoGebra:</u>

Introduktion til GeoGebra

Start med at se, hvordan man let kan tegne 3D-figurer i GeoGebra i denne video.

1.1 Tegn disse figurer i GeoGebra: En kasse, en kugle, en cylinder, et prisme og en kegle. Du bestemmer selv dimensionerne. Find volumen for figurerne.

1.2 Tegn igen en kasse, men denne gang vil vi gerne variere længde og højden i kassen med en skyder.

Du kan finde en video, der viser, hvordan man gør her

1.3 Gå videre med kassen fra før, og find volumen og overfaldeareal af den.

Du kan finde en video, der viser, hvordan man gør her

1.3 Gå videre med kassen fra før, og find volumen og overfaldeareal af den.

Du kan finde en video, der viser, hvordan man gør her

1.4 Nu skal du tegne en kasse, hvor arealet af kassens bund holdes fast.

Du kan finde en video, der viser, hvordan man gør her

Du kan finde GeoGebra filen her

a) Bemærk, hvordan kassens gulvareal ændrer sig, når du flytter på skyderen.

b) Aflæs værdier for længde og overfladeareal for mindst 10 indstillinger af skyderen, og sæt tallene ind i et sildeben, hvor længderne er x-værdier og overfladearealerne er y-værdier.

c) Tegn punkterne ind i et koordinatsystem i GeoGebra. Hvad lægger du mærke til?

Formler for areal og volumen for forskellige figurer

Du kan finde formlerne for forskellige figurers areal og volumen på webmatematik:

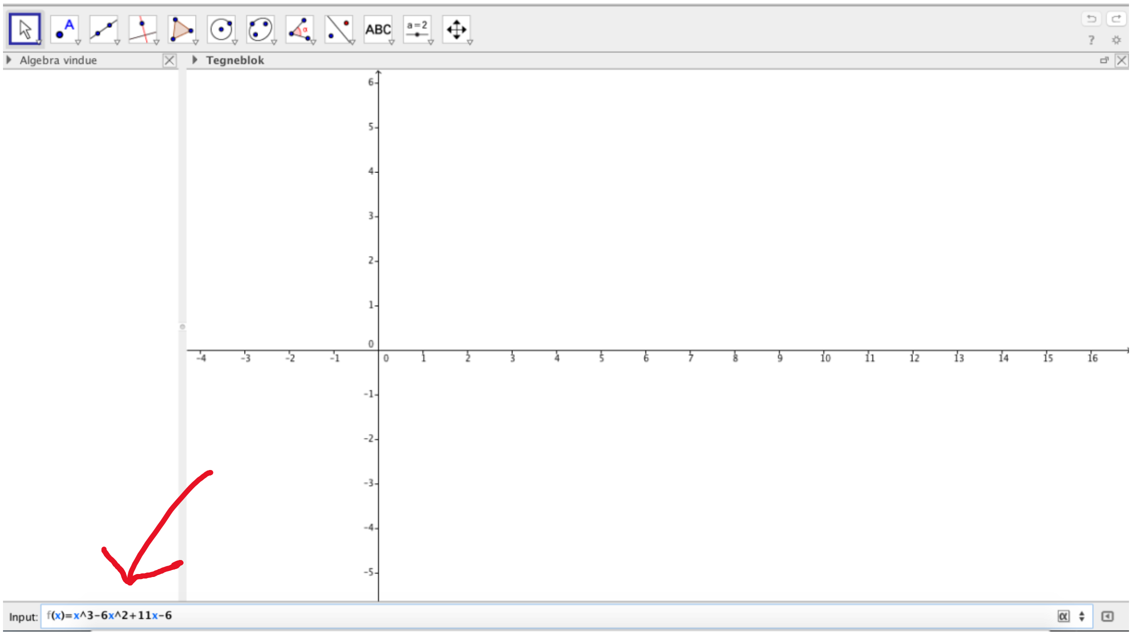
Volumen og overfladeareal (Matematik C, Geometri) – Webmatematik

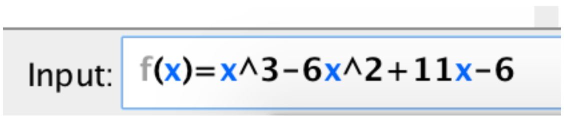
Afsnit 2 Tolkning af funktioners grafer

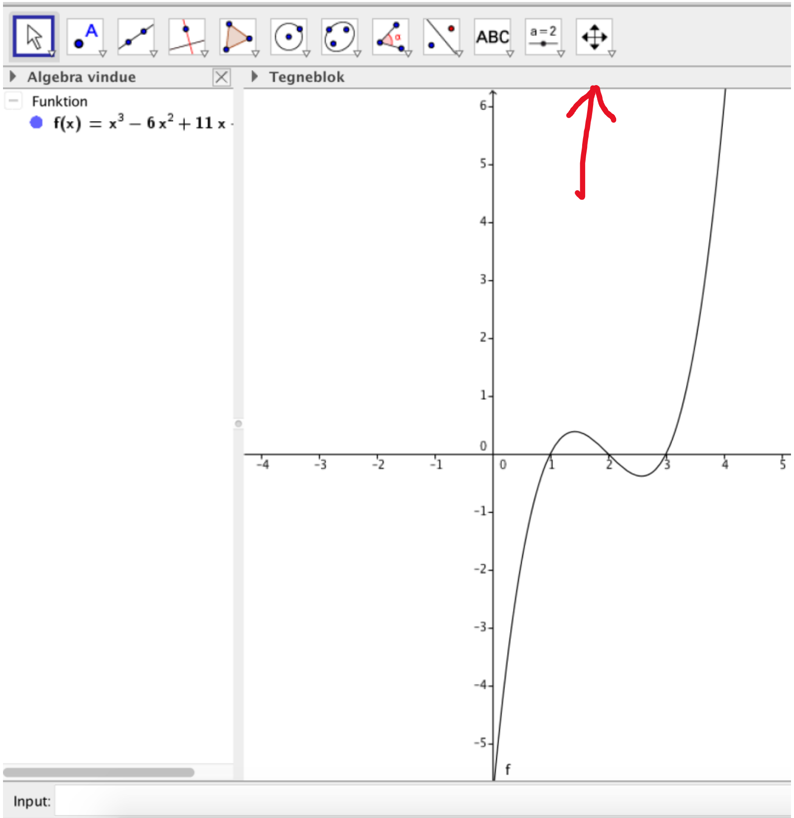
Plot af funktion
Når en funktions forskrift kendes, kan man benytte CAS eller grafregner til at lave et plot af funktionens graf.

Eksempel
Lav et plot af grafen for $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$, hvor $0 \leq x \leq 5$.

Vi benytter programmet GeoGebra til at lave plottet. Vi skriver den oplyste forskrift i kommandoboksen i bunden af vinduet og trykker på enter:







Hvis man ønsker at se et andet stykke af grafen, kan man ”flytte” tegnefladen ved at trykke på knappen, der er markeret med rød pil og derefter trække plottet i den ønskede retning.

Ydermere kan man zoome ind og ud ved at scrolle.

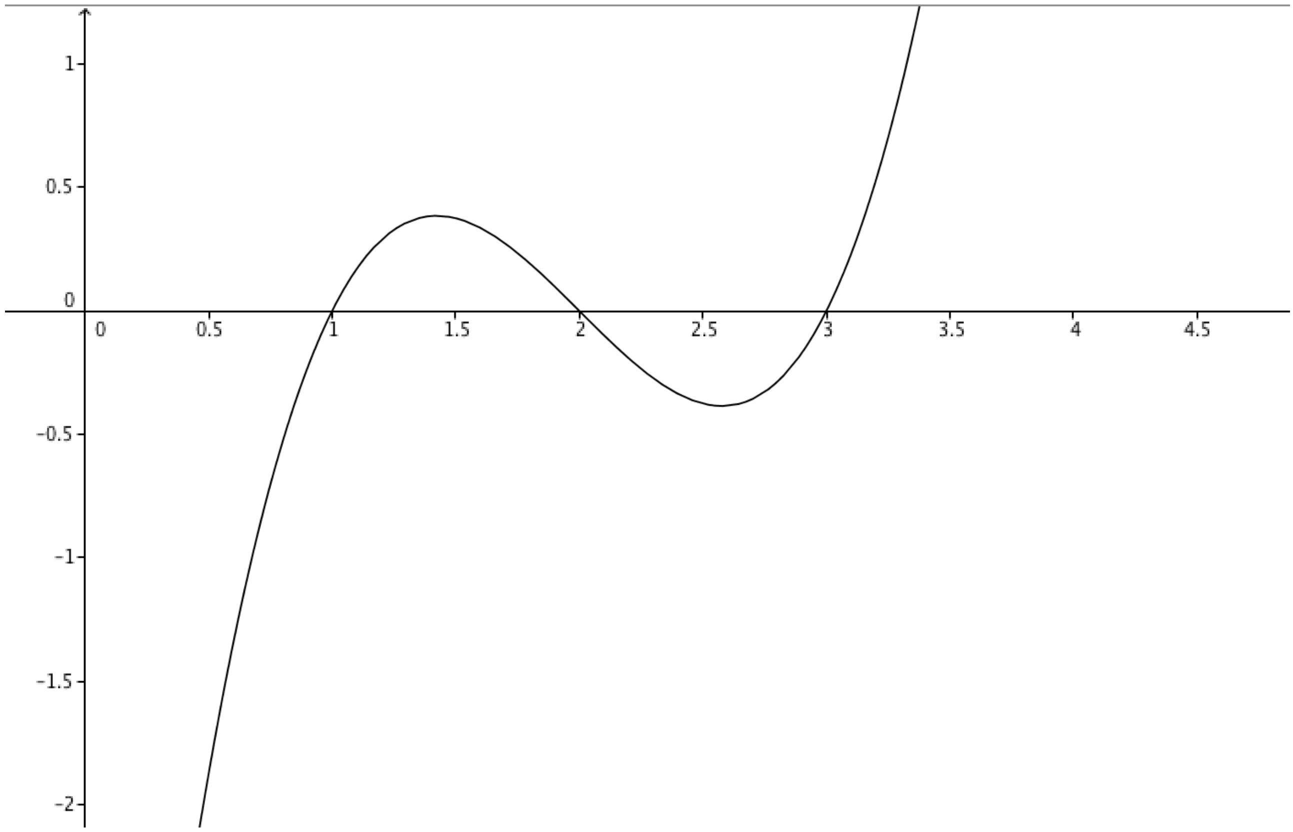
Monotoni og Grafisk aflæsning

Vi kan bruge en funktions graf til at se, hvor den er voksende, og hvor den er aftagende. Mere konkret kan vi se, i hvilke intervaller, hvori funktionen er voksende eller aftagende. At specificere disse intervaller kaldes at angive en funktions **monotoniforhold**.

Eksempel

Brug grafen til at angive monotoniforholdene for $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$, hvor $0 \leq x \leq 5$.

Lad os prøve at kigge nærmere på grafen.



Vi kan se på plottet, at funktionen først er voksende, derefter aftagende og til sidst voksende igen.

Lidt groft kan vi aflæse, at:

f er voksende på intervallerne [0;1.4] og [2.6;5].

f er aftagende på intervallet [1.4;2.6].

Tangent og monotoniskift

I eksemplet før giver vi et groft gæt på, hvor funktionen skifter fra at være voksende til at være aftagende: At den skifter monotoni.

For at have et værktøj, der gør os i stand til at være mere præcise, indfører vi **tangenten**. En tangent er en ret linje, der, som navnet antyder, tangerer funktionens graf i et punkt.

Det viser sig, at **tangentens hældning** er en uhyre informativ størrelse. Den kan fortælle os, om funktionen skifter monotoni. Det viser sig nemlig, at funktionen kun kan skifte monotoni, når tangentens hældning er 0. Altså når tangenten er vandret.

Vi kan få GeoGebra til at tegne tangenter for os på grafer. Skriv kommandoen:

Tangent[<x-værdi>,<Funktion>].

Når tangenten er tegnet, kan dens ligning findes til venstre, og i særdeleshed kan hældningen aflæses.

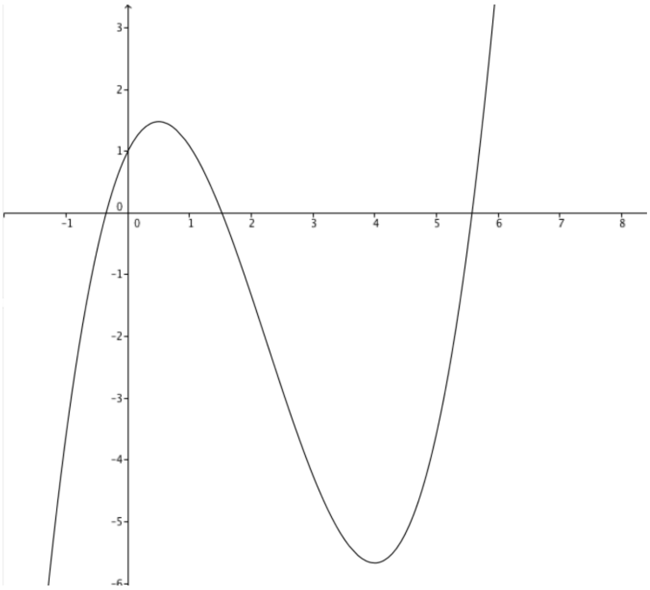
Alternativt, og lidt mere visuelt, kan tangenten også tegnes på en anden måde, som vises i videoen herunder.

Du kan finde en video, der viser, hvordan man gør her

Eksempel

Find monotoniforhold for funktionen $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{9}{4}x^2 + 2x + 1,\ \text{hvor } -1 \leq x \leq 6.$

Vi tegner først grafen:



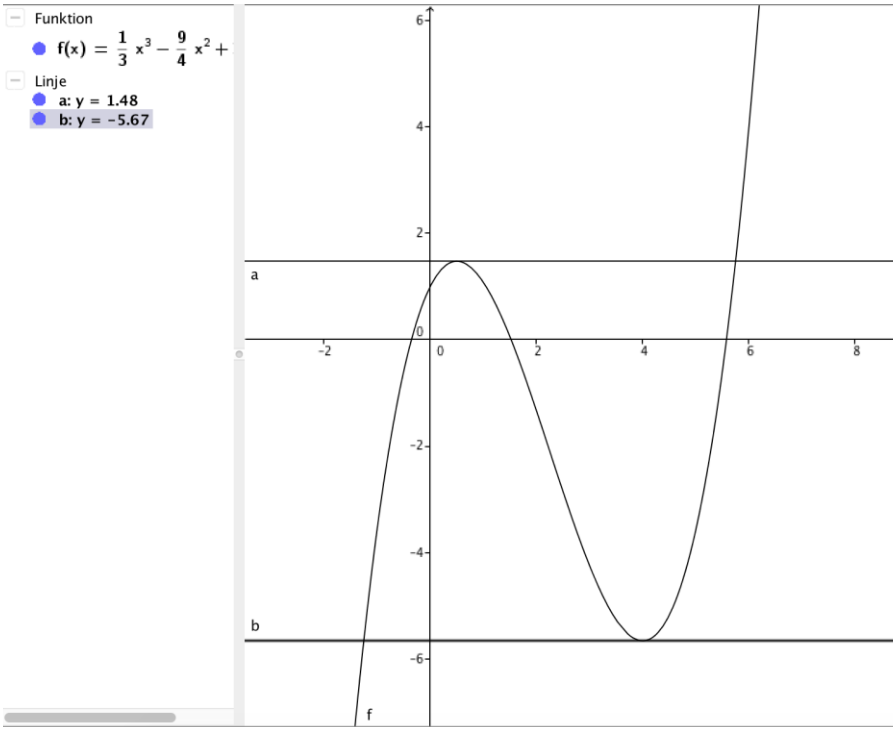
Det ser ud som om, at funktionen skifter monotoni i x-værdierne 0.5 og 4.

I første omgang kan vi derfor opskrive monotoniforholdene:

f er voksende på intervallerne [-1;0.5] og [4,6].

f er aftagende på intervallet [0.5;4].

Vi kan nu se, om vi har ramt nogenlunde rigtigt ved at tegne tangenterne i x-værdierne x=0.5 og x=4. Ved at bruge kommandoerne:



Vi ser, at begge indtegnede tangenter, som i plottet ovenfor hedder a og b, er vandrette.

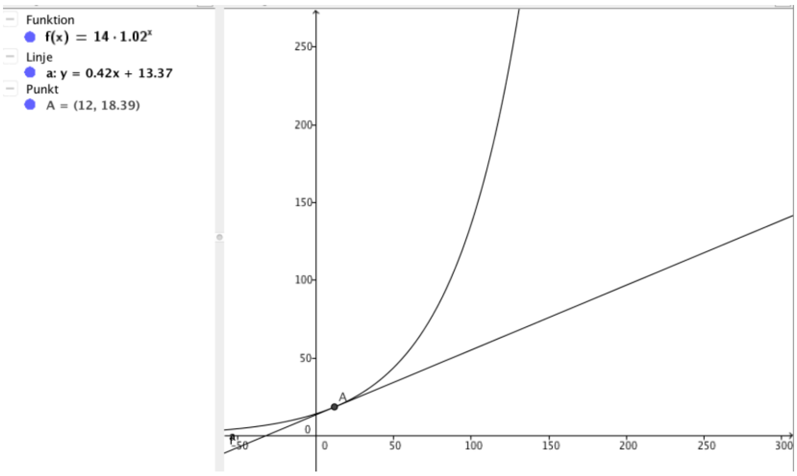
Derfor kan vi være sikre på, at vi har fundet de rigtige x-værdier, hvor funktionen skifter monotoni, og derfor de rigtige monotoniforhold.

Tangent og væksthastighed
Tangenten kan bruges til andet end at bekræfte monotoniskift. Den konkrete værdi af tangentens hældning svarer til funktionens væksthastighed.

Eksempel
En befolknings udvikling kan beskrives ved modellen $f(x) = 14 \cdot 1.02^x$, hvor x svarer til antal år efter 2000 og $f(x)$ svarer til millioner mennesker. Hvor hurtigt vokser befolkningen i år 2012?

Da 2012 er 12 år efter år 2000, skal vi finde væksthastigheden svarende til x=12.

Væksthastigheden er det samme som tangenthældningen, så vi skal lave et plot af grafen for f, indtegne tangenten svarende til x=12 og aflæse dens hældning. Dette klares i GeoGebra:



Vi aflæser tangentens hældning til at være 0.42, hvilket betyder, at befolkningen vokser med 0.42 millioner om året i år 2012.

<u>Opgaver</u>

Opgave 2.1

Tegn funktionerne $f(x) = \frac{1}{x}$ og $g(x) = \frac{1}{x} \cdot \sin(x^2)$.

Beskriv med egne ord, hvordan graferne forløber.

Opgave 2.2

En funktion f er givet ved:

$$f(x) = -x^4 - 2x^3 + 3x^2 + 1, \text{ hvor } -3 \leq x \leq 2.$$

a) Lav et plot af f, så man kan se den relevante del af grafen.
b) Bestem monotoniforholdene for f.

Opgave 2.3

En funktion f er givet ved:

$$f(x) - x^3 - 3x^2 + 9x, \text{ hvor } -5 \leq x \leq 3.$$

a) Lav et plot af f, så man kan se den relevante del af grafen.
b) Bestem monotoniforholdene for f.

Opgave 2.4
En funktion f er givet ved:

$$f(x) = x^3 - 4x^2 - 11x + 30, \text{ hvor } -4 \leq x \leq 6.$$

a) Lav et fornuftigt plot af $f(x)$.
b) Bestem en ligning for tangenten til f i punktet $(3, f(3))$.
c) Bestem monotoniforholdene for f.

Opgave 2.5
En maskinfabrik kan producere mellem 30 og 60 maskiner om året. Prisen p for en maskine afhænger af antallet af producerede maskiner x, idet:

$$p(x) = 7500x - x^3, \text{ hvor } 30 \leq x \leq 60.$$

a) Bestem det antal maskiner x, der skal produceres om året, hvis man ønsker den højeste pris pr. maskine.
b) Hvor stor bliver den årlige omsætning ved den årlige produktion, der bliver fundet under a)?

Opgave 2.6
En sten kastes lodret op i luften med udgangsfarten 10 m/s.

Dens højde over jorden $h(t)$ kan bestemmes ved funktionen:

$$h(t) = 10t - 5t^2$$

hvor t er tiden i sekunder, efter stenen er kastet.

a) Hvor længe stiger stenen?
b) Hvor højt når stenen?
c) Hvornår rammer stenen jorden?

Afsnit 3 Monotoniforhold og ekstrema

Vi vil nu gå lidt mere i detaljer med, hvordan man kan bruge en funktions monotoni til at finde frem til de steder, hvor funktionen har enten en størsteværdi eller en mindsteværdi.

Vi har set, at vi kan finde tangenter til grafer, og at hældningskoefficienten er et vigtigt tal, som vi kan bruge til at få viden om en funktions monotoni.

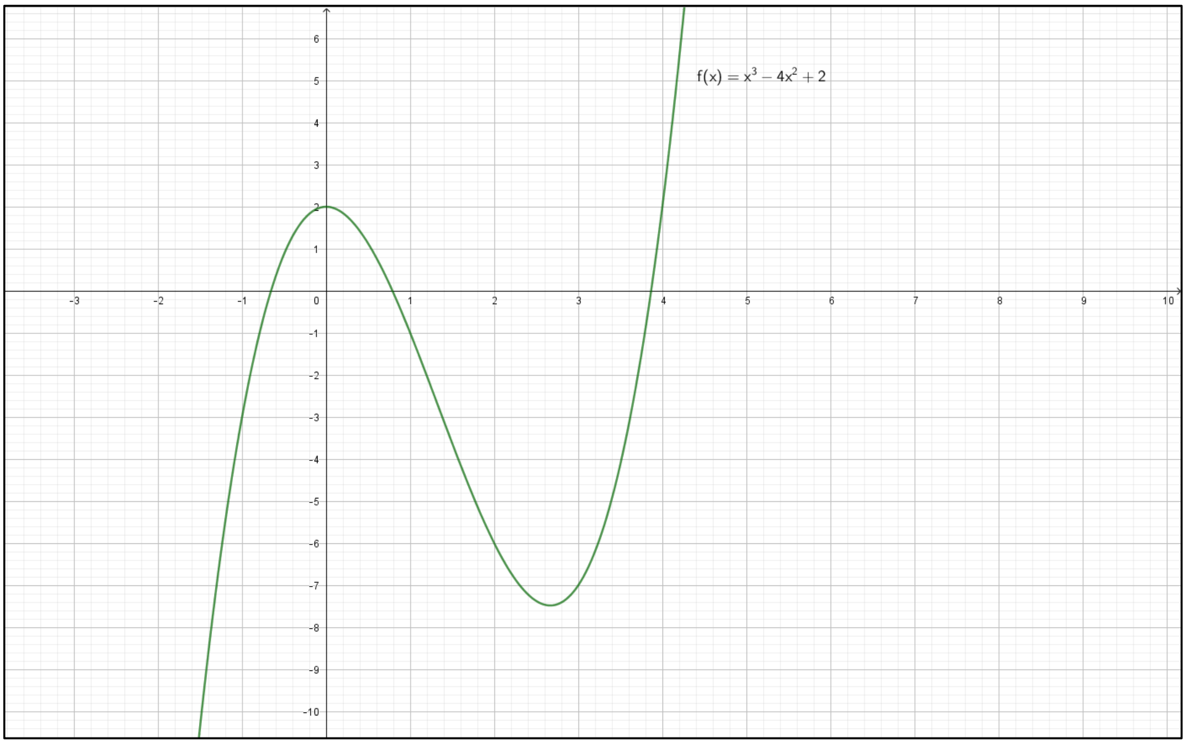
Vi kan bruge GeoGebra til at finde tangenters hældningskoefficient, og hvis vi gerne vil finde tangenthældningen på et bestemt sted på grafen, kan man tegne tangenten, så man kan flytte rundt på den.

Se videoen her igen for at se, hvordan man gør det.

Ekstrema

Vi vil gerne finde de steder på funktionens graf, hvor funktionen har en størsteværdi eller en mindsteværdi. Størsteværdier og mindsteværdier kalder vi under et for ekstrema.

Hvis vi ser på grafen for funktionen $f(x) = x^3 - 4x^2 + 2$:



Så kan vi se, at der er to steder, hvor grafen vender. Hvis vi ser på et lille område omkring de to steder, så er y-værdierne mindst eller størst lige der, hvor grafen vender. Vi siger, at vi har et lokalt ekstremum på det sted.

Der er andre steder på grafen, hvor y-værdierne er endnu mindre eller større, men vi kan godt være interesseret i de lokale ekstrema alligevel. Vi har måske fået den oplysning, at x kun kan ligge i intervallet [1;5]. Så vil der være en mindsteværdi, når x = 2,66.

Vi kan finde frem til den *x*-værdi, hvor funktionen har en største eller mindsteværdi, ved at bruge Geogebra til at finde de steder, hvor tangentens hældning er 0.

På de steder, hvor tangentens hældning er 0, siger vi, at der er mulighed for et monotoniskift. Dvs. at funktionen kan skifte fra at være voksende til aftagende eller omvendt. På grafen kan man se, at det er netop, hvad der sker både på det sted, hvor x = 0 og x = 2,66.

Monotoniintervaller

Vi kan nu bruge vores viden om, hvor der sker monotoniskift til at finde monotoniintervaller. Det svarer til, at vi skærer x-aksen op i intervaller, der hvor der er mulighed for monotoniskift.

I vores eksempel her kommer monotoniintervallerne så til at være:

$$]-\infty;0],[0;2{,}66] \text{og } [2{,}66;\infty[$$

Vi kan se på grafen og nå frem til, at:

f er voksende i intervallerne $-\infty;0]$og $[2{,}66;\infty[$.

f er aftagende i intervallet $[0;2{,}66]$.

Vi kan desuden se, at der er en lokal størsteværdi for x = 0 og en lokal mindsteværdi for x =2,66.

Boksen her indeholder de oplysninger, som vi kalder for monotoniforholdene for funktionen f.

Bemærk, at vi har snydt lidt her, da vi har påstået, at der ikke sker nogen ændringer af monotonien uden for det grafvindue, der er tegnet. Det kan der sagtens være, men det ignorerer vi her, og i dette konkrete tilfælde er der faktisk ikke nogen ændringer uden for grafvinduet.

I de problemer I kommer til at se, vil man vide, at x kun kan ligge i et bestemt interval, og så kan man jo bare tegne grafvinduet, så alle x’er er med.

Globale ekstrema

Hvis definitionsmængden er et lukket og begrænset interval, beregnes også funktionsværdierne af endepunkterne.

-Funktionens minimum bestemmes da som den mindste af de lokale minima og funktionsværdien af endepunkterne.

-Funktionens maksimum bestemmes som den største af de lokale maksima og funktionsværdien af endepunkterne.

Opgave 3.1

Se på funktionen $f(x) = 2x^2 - 4x + 7$, der er defineret i intervallet $[-1; 4]$.

a) Tegn grafen i GeoGebra, og tegn en flytbar tangent ind.

b) Find det eller de steder, hvor tangentens hældning er lig med nul.

c) Find monotoniintervallerne.

d) Skriv monotoniforholdene op for funktionen.

e) Find de lokale ekstrema for funktionen *f*.

f) Find de globale ekstrema for funktionen *f*.

Opgave 3.2

Et byggefirma skal designe en kornsilo, der kan rumme 200 m^3 korn, og er i den forbindelse interesseret i, hvordan overfladearealet afhænger af kornsiloens radius. En analytiker finder frem til sammenhængen $f(x) = \frac{400}{x} + x^2 \cdot \pi$, hvor $1 \leq r \leq 10$. Her skal man zoome en del ind for finde grafen.

Opskriv monotoniforholdene for siloens overfladeareal.

Opgave 3.3

Et firma specialiserer sig i at producere færdiglavede legehuse.

Legehusene har form som et kugleafsnit med en 2 m^2 stor indgang og skal have et rumfang på 5 m^3.

Overfladearealet af et af legehusene, kan skrives som funktion af dets højde:

$$OA(h) = \frac{20}{h} + \frac{h^2 \cdot \pi}{3} - 2, \text{ hvor } 1 \leq h \leq 3.$$

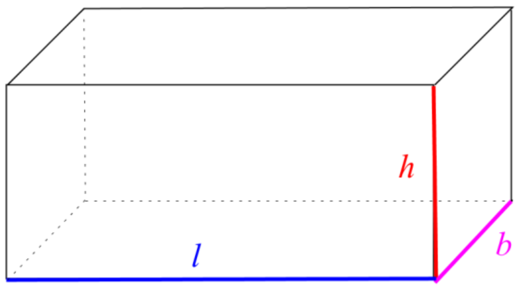
a) Lav et plot af grafen for overfladearealet.
b) Giv dit bedste bud på, hvilken højde der skal til for, at legehuset får det mindst mulige overfladeareal.
c) Giv dit bedste bud på det minimale overfladeareal, legehuset kan have.

Afsnit 4 Opstilling af funktionsudtryk

Vi begrænser os til at se på funktionsudtryk for overfladearealer og voluminer.

Målet er, at udtrykke **overfladearealet** af en given figur ved kun én variabel. Dette bliver generelt besværligt, da de fleste kendte figurer afhænger af flere variable. F.eks. afhænger en kasses overfladeareal af både dens længde højde og bredde.

Eksempel
Opskriv rumfanget og overfladeareal for en kasse.



Figur 2. Kilde: Tegnet i Maple 2019

$$V = højde \cdot længde \cdot bredde$$

$$= h \cdot l \cdot b$$

$$\begin{aligned} OA &= A_{top} + A_{front} + A_{venstre} + A_{bund} + A_{bag} + A_{højre} \\ &= 2 \cdot \left(A_{top} + A_{front} + A_{venstre}\right) \\ &= 2(længde \cdot bredde + bredde \cdot højde + længde \cdot højde) \\ &= 2 \cdot (l \cdot b + b \cdot h + l \cdot h) \\ &= 2lb + 2bh + 2lh \end{aligned}$$

Bibetingelse
Vi har i de fleste tilfælde brug for oplysninger, der begrænser opgaven. En sådan oplysning kaldes en **bibetingelse**. Det kan f.eks. være, at kassen skal have en fast højde, at længden skal være det samme som bredden eller noget helt andet. Bibetingelsen kan ofte udtrykkes som en ligning, hvor størrelserne i opgaven indgår.

Eksempel
En kasse har samme længde, som den har bredde. Bredden skal betegnes x. Kassens volumen skal være 5 m^3. Opskriv bibetingelserne.

Der er to bibetingelser her.

Den første udtaler sig om, at bredden og længden kan skrives som den samme værdi x:

$$b = l = x$$

Den anden udtaler sig om rumfanget:

$$V = 5$$

Vi kan kombinere bibetingelserne:

$$V = l \cdot b \cdot h$$
$$5 = l \cdot b \cdot h$$
$$5 = x \cdot x \cdot h$$
$$5 = x^2 h$$

Hvad skal man så bruge det til? Jo, når vi har flere udtryk, der indeholder variable fra opgaven, kan man isolere én af variablerne i bibetingelsen og således udtrykke den ønskede variabel ved de andre.

Eksempel

Udtryk h ved x i bibetingelsen fra eksemplet ovenfor:

Vi har: $5 = x^2 h$

Isoleres h, får vi: $h = \frac{5}{x^2}$

Dette er et vigtigt trin i mange optimeringsopgaver og er godt at kunne.

Elimination af variable

Når man har udtrykt én variabel ved de andre, kan dette indsættes i det oprindelige udtryk for den funktion, man gerne vil opstille (f.eks. overfladearealet). På den måde har man fjernet en variabel fra udtrykket. Man siger, at en variabel er blevet **elimineret**.

Eksempel

Eliminer l,h og b ved at bruge bibetingelserne fra tidligere eksempler, og opskriv overfladearealet for kassen, så det kun afhænger af x.

Vi husker, at overfladearealet af kassen kunne skrives som:

$$OA = 2lb + 2bh + 2lh$$

En af bibetingelserne siger, at vi må bytte l og b ud med x:

$$\begin{aligned} OA &= 2x \cdot x + 2x \cdot h + 2x \cdot h \\ &= 2x^2 + 4xh \end{aligned}$$

Vi har nu elimineret l og b og har x og h tilbage.

Den anden bibetingelse gav os, at vi kunne udtrykke h ved x:

$$h = \frac{5}{x^2}$$

Vi indsætter nu dette udtryk for h i udtrykket for overfladearelet af kassen:

$$\begin{aligned} OA &= 2x^2 + 4x \cdot \frac{5}{x^2} \\ &= 2x^2 + 4 \cdot \frac{5}{x} \\ &= 2x^2 + \frac{20}{x} \end{aligned}$$

Vi har nu et udtryk for overfladearealet, der kun afhænger af x. Variablen h er altså blevet elimineret fra udtrykket for overfladearealet.

Generelt kan man følge denne ruteplan:

1. Få et overblik over, hvilke variable der indgår. En skitse af situationen er ofte en virkelig god ide!

2.Udtryk den størrelse, som du ønsker at opskrive et funktionsudtryk for ved brug af variablerne fra skitsen.

3.Opskriv bibetingelsen (der kan være flere).

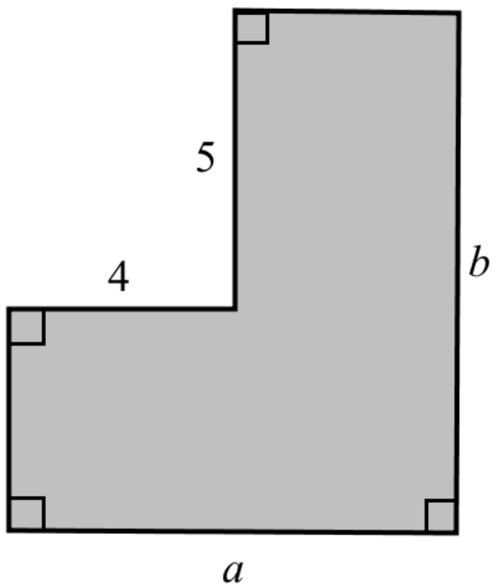
4.Benyt bibetingelsen til at eliminere alle variable på nær én.

5. Udtryk den størrelse, som du ønsker at arbejde med ved den sidste variabel.

6. I har nu et funktionsudtryk!

Opgaver

Opgave 4.1
Figuren viser en skitse af et område, som har en omkreds på 50.

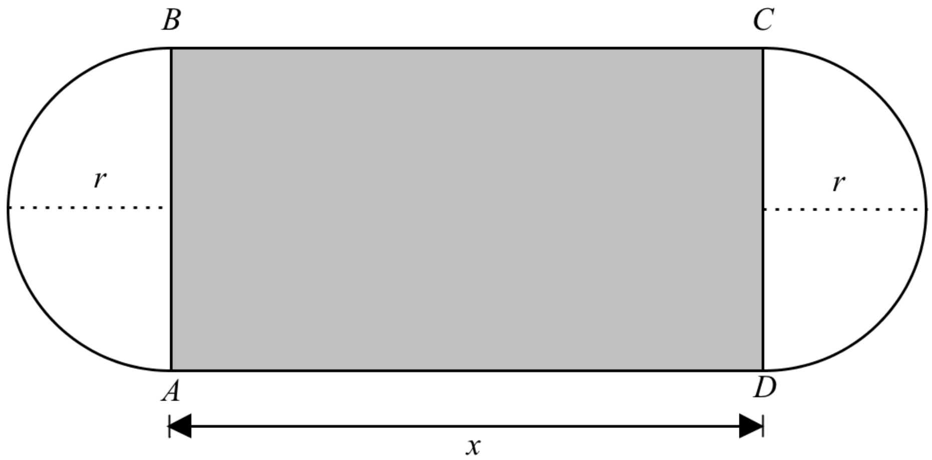


Figur 3. Kilde: Tegnet i Maple 2019

a) Opskriv et udtryk for omkredsen, der både afhænger af a og b.
b) Brug bibetingelsen til at udtrykke b ved a.
c) Bestem arealet af området som funktion af a.

Opgave 4.2

En løbebanes form er dannet af to lige lange parallelle linjestykker (på figuren AD og BC), der i begge ender er forbundet med halvcirkler.



Figur 4. Kilde: Tegnet i Maple 2019

a) Bestem omkredsen af løbebanen udtrykt ved x og r.
b) Bestem arealet af rektanglet $ABCD$ udtrykt ved x, når omkredsen af løbebanen skal være 800 m.
c) Udtryk arealet af rektanglet $ABCD$ udtrykt ved $x$og r.
d) Brug bibetingelsen til at udtrykke arealet af rektanglet $ABCD$ ved x.

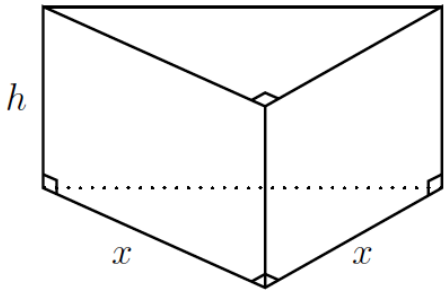
Opgave 4.3

En kasse uden låg skal kunne rumme 125 dm^3. Kassens bredde er x, og kassens længde er $2x$ (begge målt i dm).

a) Bestem kassens højde udtrykt ved x.
b) Bestem kassens overfladeareal udtrykt ved x.

Opgave 4.4

En bestemt type af lukkede beholdere har form som et retvinklet prisme, hvor grundfladen er en ligebenet retvinklet trekant. Endvidere er rumfanget af en sådan beholder 100.

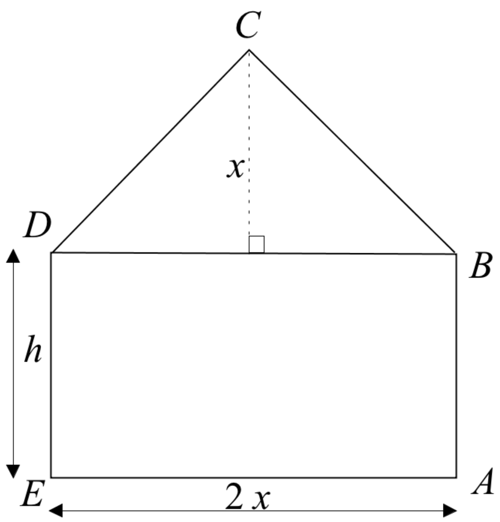


Figur 5. Kilde: Tegnet i Maple 2019

a) Opskriv overfladearealet og rumfanget udtrykt ved x og h.
b) Udtryk h ved x.
c) Angiv overfladearealet af en sådan beholder som funktion af kateternes længde x.

Opgave 4.5

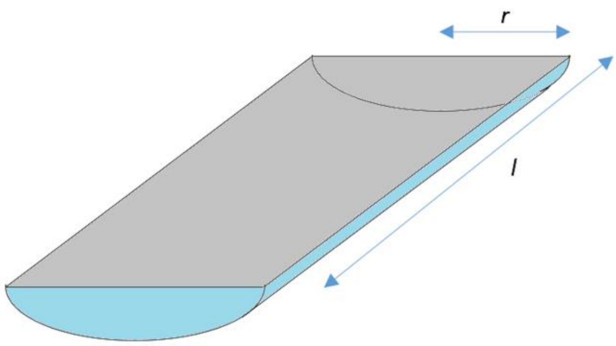
En husgavl har form som set på figuren nedenfor:



a) Bestem arealet af gavlen udtrykt ved x og h.
b) Bestem omkredsen af gavlen som funktion af x, når arealet af gavlen skal være 12 m^2.

Opgave 4.6

Et firma, der producerer havegrill arbejder på en model, der har form som en halvcylinder:



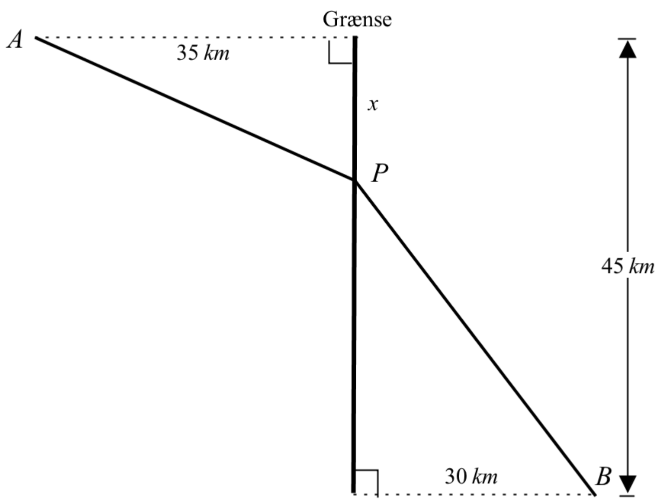
Figur 6. Kilde: Tegnet i Paint

For at minimere omkostningerne er firmaet interesseret i at finde ud af, hvordan overfladearealet hænger sammen med radius r og længden l.

a) Opskriv et udtryk for grillens overfladeareal, der afhænger af r og l.
b) Opskriv et udtryk for grillens overfladeareal, der kun afhænger af r, når grillens rumfang skal være 6 dm^3.

Opgave 4.7

Mellem to punkter A og B i to forskellige lande skal der etableres en vej APB, som vist på figuren herunder.



Figur 7. Kilde: Tegnet i Maple 2019

Prisen for stykket AP er 50 mio. kr. pr. km, og prisen for stykket PB er 60 mio. kr. pr. km.

a) Bestem $|AP|$ og $|PB|$ udtrykt ved x, idet $0 \leq x \leq 45$.
b) Bestem prisen for vejen udtrykt ved x.

Afsnit 5 Optimering

Når en given situation giver anledning til et funktionsudtryk for en størrelse, der ønskes maksimeret eller minimeret inden for de givne rammer, kaldes det **optimering**, når man finder maksimum eller minimum.

Vi har i de foregående afsnit arbejdet med:

-At finde monotoniforhold og ekstrema for en funktion.

-At opskrive funktionsudtryk for udvalgte størrelser.

Kombineres disse to discipliner har vi altså stort set udført det, som vi kalder optimering.

Eksempel
En kasse har højde h og samme længde som bredde, der betegnes med x. Find det mindste overfladeareal, når kassens volumen skal være 10 m^3.

Vi opskriver kassens volumen og overfladeareal. Vi springer et par mellemregninger over, da vi allerede har lavet disse i et tidligere afsnit

$$V = x^2 h$$

$$OA = 4xh + x^2$$

Bibetingelsen i denne opgave er $V = 10\ m^3$, som vi bruger til at eliminere variablen h.

$$10 = x^2 h$$
$$h = \frac{10}{x^2}$$

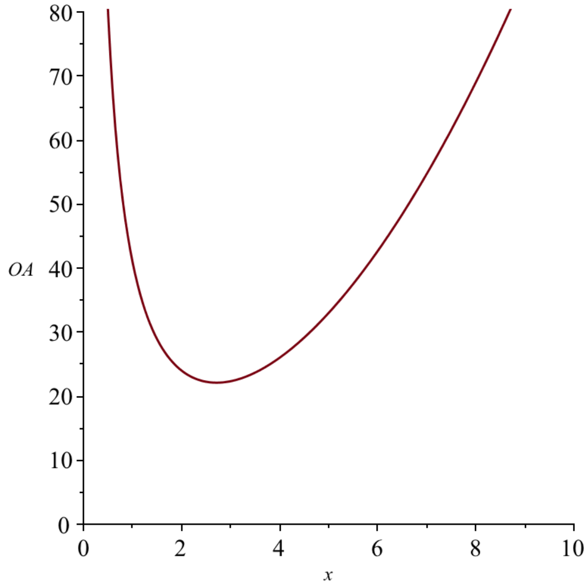
Vi indsætter udtrykket for h i udtrykket for OA for eliminere h.

$$OA = 4xh + x^2$$
$$OA = 4x \cdot \frac{10}{x^2} + x^2$$

$$OA = \frac{40}{x} + x^2$$

Vi har nu en funktion for overfladearealet: $OA(x) = \frac{40}{x} + x^2$.

Vi laver et plot af overfladearealet, så vi kan se, om det har et minimum:



Figur 8. Kilde: Tegnet i Maple 2019

Vi ser, at overfladearealet har et minimum omkring $x = 2.5$.

Man kan komme endnu tættere på den korrekte bredde ved at finde det sted, hvor tangenten er vandret. Med lidt prøven sig frem i GeoGebra, ser man, at det er ved 2.7 m.

Det tilsvarende overfladeareal findes ved at indsætte den fundne x-værdi i vores funktion for overfladearealet:

$$OA_{min} \approx OA(2.7) = \frac{40}{2.7} + 2.7^2 = 22.1\ m^2$$

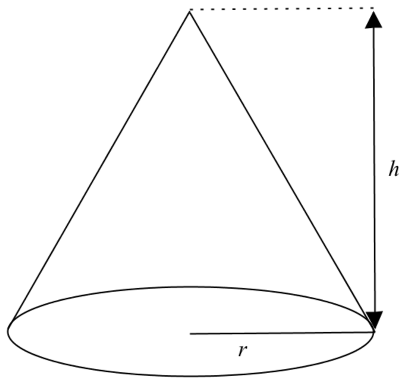
Altså er kassens mindste overfladeareal 22.1 m^2

Eksempel

På en folkeskole er der emneuge, og til dette skal der bl.a. bruges en tipi (et kegleformet indianertelt), hvori børnene skal lave indianersmykker.

Der skal være plads til 10 arbejdende børn, og tipiens **volumen** skal derfor ifølge arbejdstilsynet være på **120 m^3**. Derudover må radius af tipien ikke være mindre end 2 m og ikke større end 7 m. Tipiens sider skal laves af lærredsstof, og man kan se bort fra bunden. Da skolen skal spare, vil de gerne bygge tipien ved at bruge så lidt stof som muligt. Hvor mange m^2 stof skal der mindst bruges?

Vi har her at gøre med en kegleform, hvor både volumen og overfladearealet er relevant.



Figur 9. Kilde: Tegnet i maple 2019

Formlerne for disse er:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$$

$$OA = \pi \cdot r \cdot \sqrt{r^2 + h^2}$$

Vi bemærker, at overfladearealet OA afhænger af både r og h. For at vi kan finde monotoniforhold og ekstrema for overfladearealet, må det kun afhænge af én variabel. Altså skal enten r eller h elimineres, og til dette skal vi bruge en bibetingelse. Vi ser i opgaveteksten, at rumfanget af tipien skal være 120 m^3. Dette kan skrives som:

$$V = 120$$

$$\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h = 120$$

I dette udtryk kan vi isolere h:

$$\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h = 120$$

$$r^2 \cdot h = 3 \cdot \frac{120}{\pi}$$

$$h = 3 \cdot \frac{120}{\pi \cdot r^2}$$
$$h = \frac{360}{\pi \cdot r^2}$$

Dette kan indsættes i udtrykket for overfladearealet:

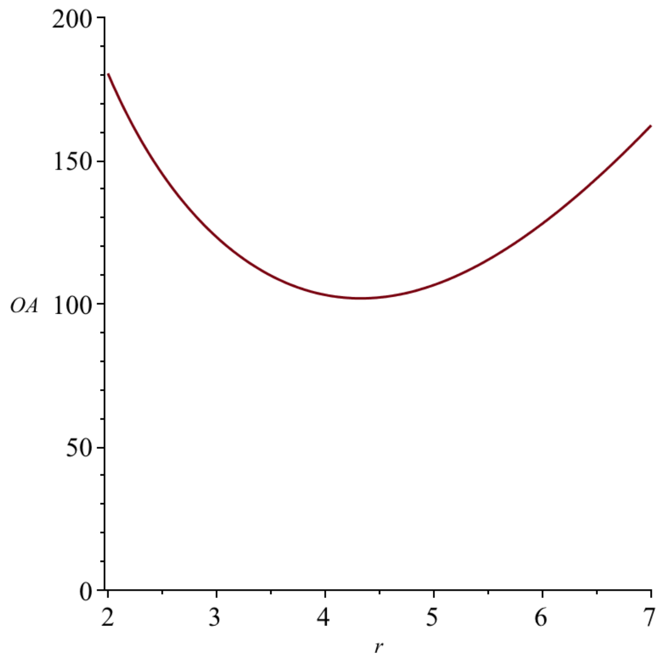
$$OA = \pi \cdot r \cdot \sqrt{r^2 + h^2}$$
$$OA = \pi \cdot r \cdot \sqrt{r^2 + \left(\frac{360}{\pi \cdot r^2}\right)^2}$$

Selv om udtrykket her ser lidt farligt ud, afhænger det i det mindste kun af én variabel r.

Vi har altså nu opstillet et funktionsudtryk for overfladearealet, som vi kan arbejde med.

I opgaveteksten ser vi, at $2 \leq r \leq 7$, så vi har en definitionsmængde for overfladearealet på [2;7].

Vi laver et plot af overfladearealet, så vi kan se, om det har et minimum. Vi husker at benytte definitionsmængden som begrænsning:



Figur 10. Kilde: Tegnet i Maple 2019

Vi ser tydeligt af plottet, at overfladearealet har et minimum, når radius er omkring 4.2 m.

Man kan komme endnu tættere på den korrekte radius ved at finde det sted, hvor tangenten er vandret. Med lidt prøven sig frem i GeoGebra, ser man, at det er ved 4.3 m.

Det tilsvarende overfladeareal findes ved at indsætte den fundne radius i vores funktion for overfladearealet:

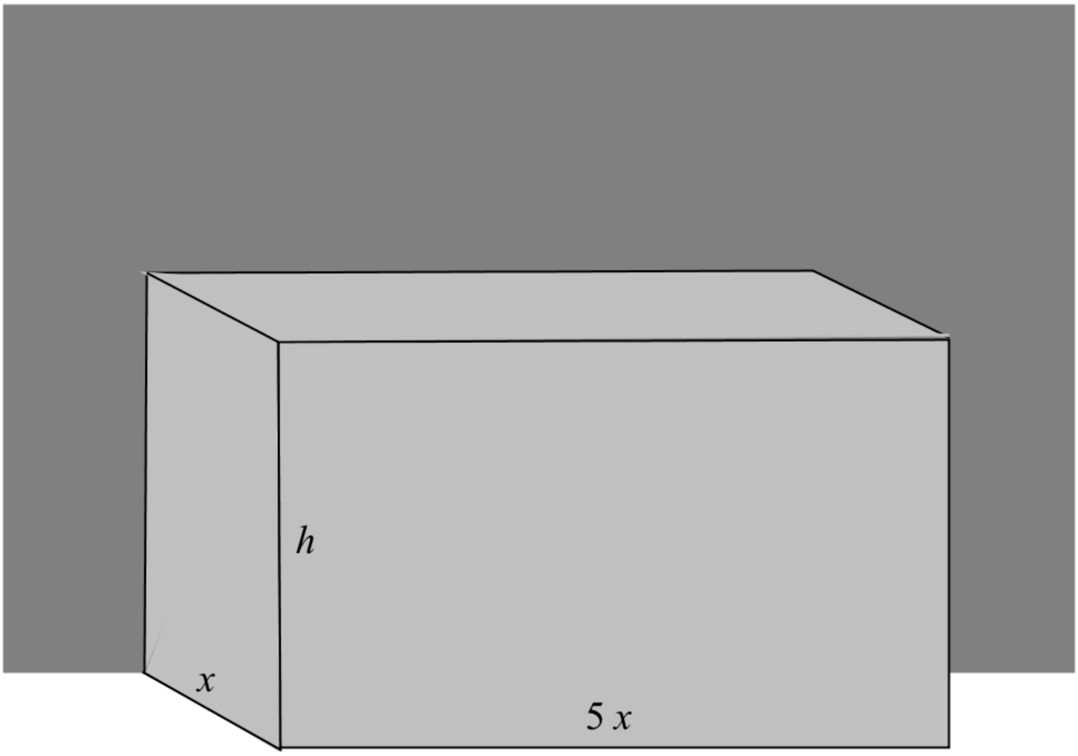
$$OA_{min} \approx OA(4.3) = \pi \cdot 4.3 \cdot \sqrt{4.3^2 + \left(\frac{360}{\pi \cdot 4.3^2}\right)^2} = 101.89\, m^2$$

Altså skal der mindst benyttes 101.89 m^2 lærred til at bygge tipien.

<u>Opgaver</u>

Opgave 5.1

Et kasseformet fuglebur skal bygges langs en mur, så at en del af muren udgør den ene side, og jorden udgør bunden af buret. Den del af buret, der skal indhegnes med trådnet, består således af loftet og de tre andre sider. Buret skal være 6 gange så langt, som det er bredt. Bredden betegnes med x, og højden betegnes med h.



Figur 11. Kilde: Tegnet i Maple 2019.

a) Gør rede for, at fugleburets overfladeareal OA og rumfang V kan udtrykkes ved x og h, således at:

$$OA = 5 \cdot x^2 + 7 \cdot h \cdot x$$
$$V = 5 \cdot x^2 \cdot h$$

Det oplyses, at overfladearealet er 70 m^2.

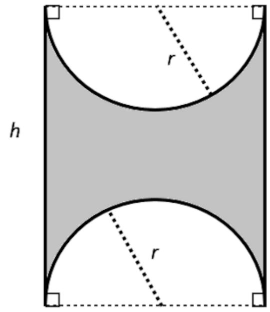
b) Bestem rumfanget V udtrykt ved x, og bestem det størst mulige rumfang, når $0 < x < 3$.

Opgave 5.2

Et stykke metal har form som et rektangel med sidelængderne h og $2r$.

To halvcirkler med radius r skæres ud af metalstykket, som vist på figuren herunder.

Det tilbageværende metalstykke har omkredsen 8.



Figur 12. Kilde: Tegnet i Maple 2019.

a) Bestem h udtrykt ved r.

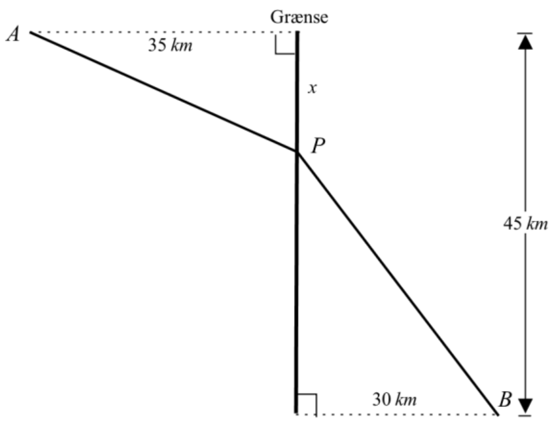
b) Gør rede for, at arealet af det tilbageværende metalstykke som funktion af r kan skrives ved:

$$A(r) = 8 \cdot r - 3 \cdot \pi \cdot r^2$$

c) Bestem r, så metalstykket bliver størst muligt, og find det største areal.

Opgave 5.3

Mellem to punkter A og B i to forskellige lande skal der etableres en vej APB, som vist på figuren herunder.



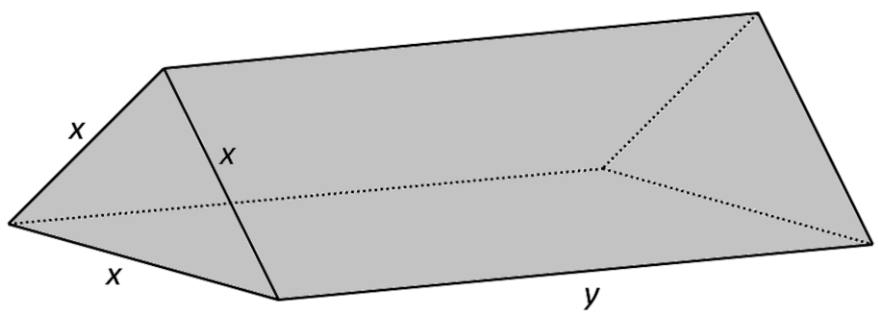
Figur 13. Kilde: Tegnet i Maple 2019.

Prisen for stykket AP er 50 mio. kr. pr. km, og prisen for stykket PB er 60 mio. kr. pr. km.

c) Bestem $|AP|$ og $|PB|$ udtrykt ved x, idet $0 \leq x \leq 46$.
d) Bestem prisen for vejen udtrykt ved x.
e) Bestem den værdi af x, der gør vejen APB billigst.
f) Bestem prisen for den billigste vejstrækning APB.

Opgave 5.4

En særlig type festtelt, der kan lukkes i begge ender og har samme gulvtype som loftet, har form som vist på figuren herunder. Teltets endeflader har form som ligesidede trekanter med siden x, hvor $1 \leq x \leq 15$. Teltets længde er y.



Figur 14. Kilde: Tegnet I Paint.

a) Bestem teltes rumfang, når $x = 3m$ og $y = 6m$.
Det oplyses, at en bestemt type af sådanne beholdere har et rumfang på 100m^3.

Ydermere oplyses det, at overfladearealet OA af denne beholder som funktion af x er givet ved:

$$OA(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}x^2 + 400 \cdot \frac{\sqrt{3}}{x}$$

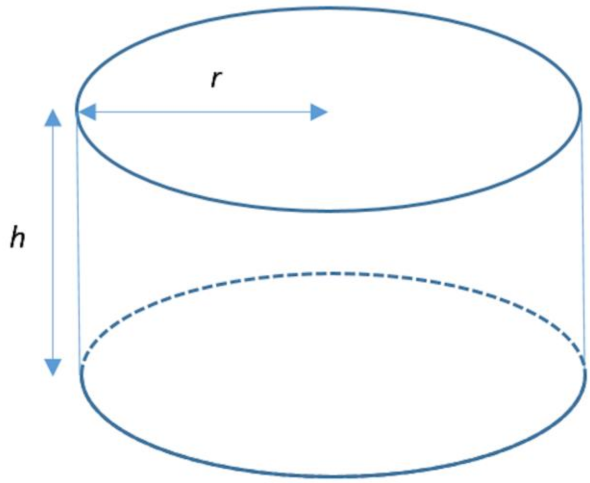
b) Bestem x, så beholderens overfladeareal er mindst mulig.
c) Bestem det mindst mulige areal for beholderen.
d) (svær) Gør rede for, at:

$$OA(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}x^2 + 400 \cdot \frac{\sqrt{3}}{x}$$

Hint: Højden af de ligesidede trekanter, som udgør endefladerne, er $h = \frac{\sqrt{3}}{2}x$.

Opgave 5.5

Et firma, der producerer havegrill, arbejder på en model, der har form som en cylinder, der er åben i toppen:



Figur 15. Kilde: Tegnet i Paint

For at minimere omkostningerne er firmaet interesseret i at minimere overfladearealet og således materialeforbruget.

a) Opskriv et udtryk for grillens overfladeareal OA, der afhænger af r og h.
b) Opskriv et udtryk for grillens overfladeareal OA, der kun afhænger af r, når grillens rumfang skal være 6 dm^3.
c) Find den værdi af r, der minimerer overfladearealet OA.
d) Beregn den mindste værdi af overfladearealet OA_{min}

Opgave 5.6

Et firma skal producere et popcornbæger, der kan rumme 4 liter popcorn, og som har form som en kegle. Da der skal bruges så lidt materiale som muligt, ønsker firmaet minimere overfladearealet.

a) Opskriv et udtryk for overfladearealet OA for popcornbægeret, der afhænger af bægerets radius r og højde h.

b) Udtryk h ved r.

c) Opskriv et udtryk for overfladearealet OA for popcornbægeret, der kun afhænger af bægerets radius r.

d) Find den radius r, der giver popcornbægeret det mindste overfladeareal.

e) Beregn det mindste overfladeareal OA_{min}.

Afsluttende opgave

Efter jeres virksomhedsbesøg skal I arbejde med en projektopgave, hvor I skal optimere en bygning.

Hvis virksomheden har givet jer en optimeringsopgave, skal I prøve at komme med en løsning på den:

1) I skal designe en bygning, der lever op til de krav, virksomheden har stillet.

2) I skal fremstille et produktblad, som skal sendes til den virksomhed, I har besøgt. Længere nede er det beskrevet, hvad produktbladet skal indeholde.

Produktblad
I skal fremstille et produktblad for jeres bygning, der skal indeholde følgende:

1) En løsning af optimeringsopgaven herover. I skal præsentere resultaterne på en form, så en ingeniør forstår jeres besvarelse.

2) Præsentation af bygningen:

- Fremstil en skitse i GeoGebra i 3 dimensioner, som har de dimensioner, I har regnet jer frem til i optimeringsopgaven. Diskutér bygningens form.
- Fremstil gerne en tegning med flere detaljer.
- Fremstil en tekst, der præsenterer jeres bygning. Her skal I lægge vægt på, at bygningen har dimensioner, der bidrager mindre til CO_2-udslip end andre bygninger med samme gulvareal.

3) Jeres produktblad skal være ”lækkert”, så det kan være med til at sælge konceptet for virksomheden. I bestemmer selv i hvilken rækkefølge I vil præsentere de forskellige elementer.

Hvis ikke virksomheden har mulighed for at stille jer en opgave, kan I i stedet løse den alternative optimeringsopgave, der er på næste side😊

Introduktion til opgaven

Bygninger står for 40 pct. af Danmarks samlede energiforbrug.

En stor del af energiforbruget går til opvarmning af vores bygninger. Varmen skal være tilpas, så vi hverken fryser derhjemme eller på skolen. Mister vi varme, skal der tilføres ny varme.

Ingeniører designer således bygningerne, så de har så lille et varmetab som muligt, hvilket medfører, at der skal tilføjes så lidt ny varme som muligt.

Varme vil gradvist komme ud af bygningen til det fri gennem bygningens overflade (f.eks. vægge, tage, vinduer etc.). Jo større overflade, jo mere varme kan slippe ud. For at minimere varmeoverførslen gennem bygningens overflade bør bygningens form principielt være så kompakt som muligt.

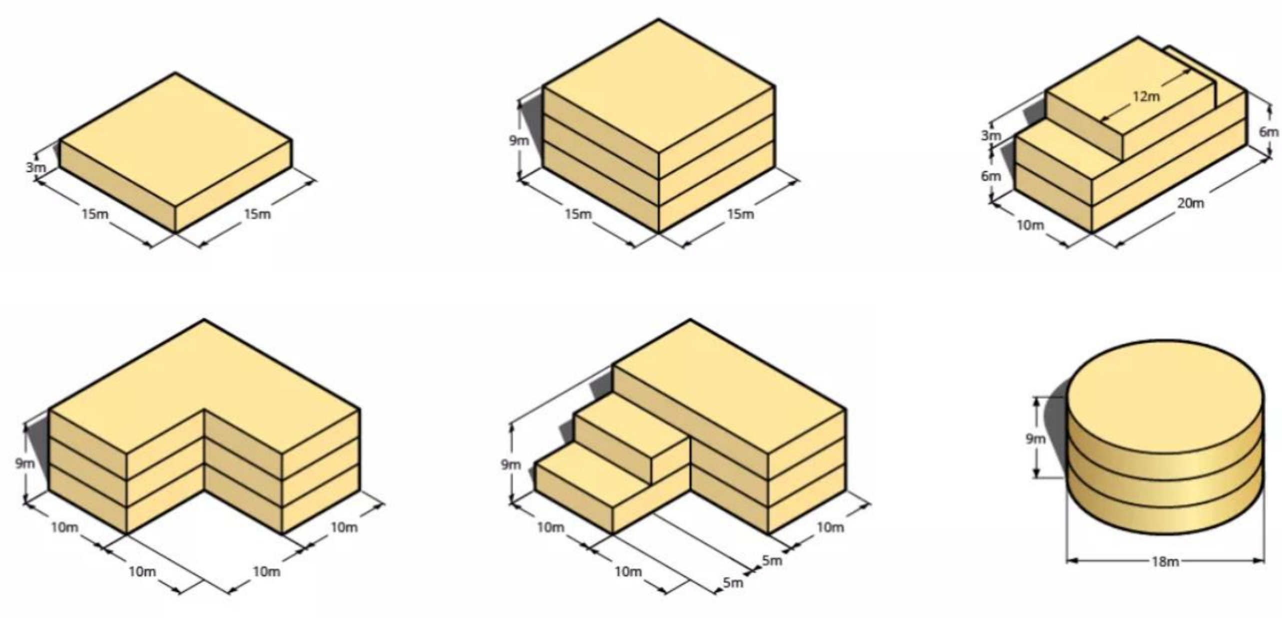
Sammenligning af energieffektiviteten ved forskellige design skal helst ske i den tidlige designfase af bygningerne. Dette arbejde er meget vigtigt for de ingeniører, som designer bygningen.

Energibesparelser i en bygning er vigtige af flere årsager. Det bestemmer bygningens værdi. Folk foretrækker energieffektive bygninger, fordi de har lavere driftsomkostninger. Sidst, men ikke mindst, bidrager energieffektive bygninger til et bedre og mere bæredygtigt miljø.

Vi skal altså designe vores bygninger, så vi får mest muligt volumen inden for, samtidig med at vi har mindst muligt overfladeareal, hvor vi mister varme.

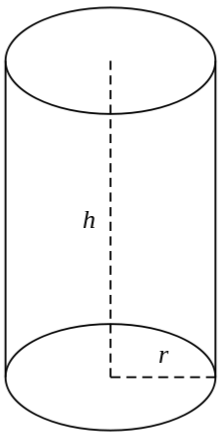
Dette kan løses ved at se på forskellige geometrier og udformninger af bygninger.

Her er et par eksempler:



Ved at bruge matematikken til at optimere designet af vores bygninger, kan vi reducere energiforbruget til opvarmning og dermed bidrage til et mere bæredygtigt samfund.

Opgave: Energioptimering af en cylinderformet bygning



Figur: Bygningen skal have form som en cylinder

Figur: Hotel i Atlanta, USA (Wikipedia)

I skal fremstille en cylinderformet bygning, og den kan godt have flere etager. Vi er interesseret i at finde frem til, hvilket antal etager der giver det mindste overfladeareal, hvis vi gerne vil have et bestemt gulvareal i bygningen.

Vi antager, at der i alt er 3 m mellem hver etage.

Vi antager, at det samlede gulvareal i bygningen skal være 1000 m^2.

a) Find en funktion, der giver det samlede overfladeareal af bygningen. Her skal ydervæggen og loftet regnes med. I skal finde frem til en funktion, der afhænger af de to variable h og r, som ses på figuren herover.

b) Find en funktion, der beregner det samlede gulvareal i bygningen. I skal finde frem til en funktion, der afhænger af variablen h, som ses på figuren herover (hint: I får variablen h med i funktionen ved at tænke ind, at der er flere etager i bygningen).

c) Brug funktionen, I fandt i opgave b), til at fjerne variablen r i funktionen, der beregner overfladearealet af bygningen. Herved skal I gerne nå frem til en funktion, der beregner bygningens overfladeareal, og som kun afhænger af variablen h.

d) Undersøg nu, hvilken højde af bygningen der giver det mindste overfladeareal.

e) Hvor mange etager vil der være i bygningen, når den har den højde I fandt i opgave d)?

f) I har sikkert fundet ud af at din højde af bygningen ikke giver et helt antal etager. Overvej, hvilken betydning det har for dit resultat.