MATERIALESAMLING

STATISTIK I HVERDAGEN

MATEMATIK A- OG B-NIVEAU

INDHOLD

Introduktion 2
Kapitel 1: Principperne bag statistiske tests (generelt) 3
Kapitel 2: Binomialfordelingen 9
Opgaveark 2.1: Binomialfordelingen - indsættelsesøvelse 11
Kapitel 3: Binomialtest 12
Opgaveark 3.1: Mix & match 16
Forbind begreberne i venstre søjle med definitionerne i højre søjle. 16
Opgaveark 3.2: Venstresidet eller højresidet test? 17
Opgaveark 3.3.1: Enkeltsidet binomialtest. GRØN 19
Opgaveark 3.3.2: Enkeltsidet binomialtest. GUL 22
Opgaveark 3.3.3: Enkeltsidet binomialtest. RØD 25
Opgaveark 3.4: Gruppepræsentationer 27
Opgaveark 3.5: Øvelser til dobbeltsidet test 30
Kapitel 4: Konfidensintervaller 33
Opgaveark 4.1. Opgaver til konfidensintervaller: 35
Opgaveark 4.2.: Konfidensinterval for stikprøveandel – Det matematiske argument for formlen 39
Aflevering om Holger 42

Introduktion

I dette undervisningsforløb skal I arbejde med, hvordan vi bruger statistik i hverdagen. I vil stifte bekendtskab med en lang række af begreber indenfor statistik og databearbejdning, såsom binomialtest, højre-, venstre- og dobbeltsidet test, samt konfidensintervaller. Som led i undervisningsforløbet, skal I besøge et analyseinstitut eller en virksomhed, der arbejder med indsamling og bearbejdning af statistik.

Materialet er udviklet af
Kirsten Koch Lægaard, Solrød Gymnasium
Jonas Kyhnæb, Frederiksberg Gymnasium og
DA Åben Virksomhed

Kapitel 1: Principperne bag statistiske tests (generelt)

Inden for statistikkens verden beskæftiger man sig med observationer (data) fra virkeligheden. Observationerne kaldes i sandsynlighedsregningen for *udfald*. Typisk er der tale om tal, men ikke nødvendigvis. Sådanne data kan være behæftet med fejl, f.eks. måleusikkerheder. Andre typer af *tilfældigheder* kan også gøre, at observationerne ikke stemmer overens med det som man havde forventet. Det kunne f.eks. være en meningsmåling med et overraskende resultat. Statistikerens opgave er at opstille en *hypotese* om virkeligheden og *teste* denne hypotese ved hjælp af matematik.

I statistik bruger man en masse *sandsynlighedsregning*. Vi belyser med et par eksempler, hvad der forstås ved *sandsynligheden for et udfald*:

Ved kast med en mønt er sandsynligheden for plat 50%. Dette skyldes, at hvis man kaster en mønt mange gange (ideelt: uendelig mange gange), så vil mønten vise plat i 50% af tilfældene. Ved et terningkast med en ærlig terning er sandsynligheden for at slå ”en 6’er” $\frac{1}{6}$ (dvs. ca. 16,7%), idet man forventer ved mange (ideelt: uendelig mange) terningkast at terningen i en sjettedel af tilfældene vil give en 6’er. Forestil dig nu, at du kastede med en terning 60 gange og kun fik fem 6’ere. Ville du så tro, at der var blevet manipuleret med terningen? Eller skyldes det bare tilfældigheder, at du kun fik fem 6’ere? Det er blandt andet denne slags spørgsmål, vi kan undersøge og afgøre ved hjælp af *statistiske test.*

Der findes et hav af forskellige statistiske test, der hver især passer til forskellige matematiske modeller af virkeligheden. De hviler dog alle på det samme princip, som vi her vil forsøge at skitsere.

Vi formulerer en forsøgsvis hypotese (nulhypotese) om virkeligheden og tager en *stikprøve* (hhv. gennemfører et eksperiment) med observationer. Vi vil så bruge stikprøven til at forkaste eller acceptere hypotesen (i nogle situationer og opgaver starter man med eksperimentet/indsamlingen af data og formulerer herefter den hypotese, man ønsker at teste vha. eksperimentet/observationerne).

Når man skal finde ud af, om man kan forkaste eller acceptere hypotesen på baggrund af stikprøven, er idéen at *se på, hvor langt det observerede er fra det forventede*. Eller mere præcist:

Hvor stor er sandsynligheden for at få det observerede udfald under den forudsætning, at nulhypotesen er sand?
Hvis sandsynligheden er lille, vil vi vælge at forkaste nulhypotesen. Hvis sandsynligheden ikke er lille, vil vi acceptere hypotesen (*ikke forkaste).*

Hvad en ”lille” sandsynlighed er, afhænger af, hvor sikker man ønsker at være i sine konklusioner. Når vi bruger data fra virkeligheden, spiller tilfældigheder jo ind. Det kunne jo være, at hypotesen var sand, og at det blot var tilfældigheder, der havde givet den ”dårlige” observation (i forhold til det forventede). Det kunne også ske, at hypotesen var falsk, men at tilfældigheder fik den til at forekomme ”god.”

Man skal med andre ord vælge en ”grænse” for hvad ”lille” betyder. Denne grænse kaldes inden for statistik for *signifikans-niveauet.*

Når man laver hypotesetest, kan der i princippet gå to ting galt i forhold til de udsagn (hypoteser) man ønsker at komme med om virkeligheden:

1) Man kan forkaste en hypotese, der faktisk er sand (kaldes **”Fejl af type I”**), *eller*

2) Man kan acceptere (dvs. undlade at forkaste) en hypotese, der faktisk er falsk (kaldes **”Fejl af type II”**)

Hvis man ønsker at være rimelig sikker på ikke at forkaste en hypotese, hvor man har en stærk formodning om, at den er sand, skal man sætte signifikansniveauet relativt lavt, f.eks. på 1%.

Hvis man ønsker at være rimelig sikker på ikke at acceptere en hypotese, hvor man har en stærk formodning om, at den er falsk, skal man sætte signifikansniveauet relativt højt, f.eks. på 10%.

Men i alle tilfælde, er der en risiko for at konkludere forkert. Dette er et grundvilkår inden for hypotesetest, fordi der er tilfældigheder med i spillet. For at lande ”et sted midt imellem” vælger man oftest et signifikansniveau på 5%. I så fald siger man, at man *tester hypotesen på signifikansniveau 5%*, og derefter *forkaster* (hhv.) *accepterer hypotesen på signifikansniveau 5%*. Da valget af signifikansniveau påvirker den sikkerhed, hvormed man kan konkludere, skal man altså angive det tydeligt over for sin læser.

Et signifikansniveau på 5% betyder, at man ved mange tests (eksperimenter) vil forkaste en sand hypotese i 5% af testene (begå type-I-fejl i 5% af tilfældene). Og tilsvarende for de øvrige signifikansniveauer.

I statistik tager man hensyn til, at verden ikke er deterministisk, så her kan man ikke konkludere, at udgangsantagelsen ikke er sand, men man kan eventuelt slutte, at det man har set i sit forsøg, er usandsynligt, hvis udgangsantagelsen skulle være sand. Dermed peger forsøget på, at antagelsen ikke er rigtig.

En konklusion inden for statistik vil derfor ofte indeholde forsøg på nuanceringer i stil med: ”Jeg er ikke utilbøjelig til at mene at…”, ”det er sandsynligt at…” eller ”med nogen sikkerhed kan det fastslås at…”. Det gælder typisk, hvis man er i ”grænselandet”, hvor en klar accept eller forkastelse af en hypotese ikke ligger lige for. Har vi valgt et signifikansniveau på 5%, og sandsynligheden for det observerede udfald er 6,5%, kan man jo ikke forkaste hypotesen, men man accepterer den måske heller ikke helhjertet…

Fremgangsmåden ved statistiske tests i punktform (Bemærk at punkt 1 og 2 nogle gange udføres i omvendt rækkefølge):

1. Vi starter med nogle observationer, som vi har fået gennem et eksperiment/udtagelse af en stikprøve
2. Vi opstiller en hypotese, som vi vil teste vha. vores observationer/stikprøven (kan den forkastes eller accepteres?)
3. Vi fastlægger et signifikansniveau (hvor usandsynlige må vores observationer være, før vi forkaster hypotesen?)
4. Vi finder ud af, hvor sandsynlige vores observationer er, hvis hypotesen er sand (til dette kan vi bruge forskellige sandsynlighedsfordelinger som for eksempel binomialfordelingen eller normalfordelingen. Det afhænger af situationen)
5. Konklusion: vi forkaster/accepterer nulhypotesen ved at sammenligne denne sandsynlighed med signifikansniveauet

6 spørgsmål til en statistisk undersøgelse

Hvad er populationen og hvor stor er stikprøven?

Populationen er den gruppe, som undersøgelsen gerne vil udtale sig om. Hvis den gruppe er meget stor (fx *Danmarks befolkning eller Kvinder*) spørger man ikke alle, men udtager en *stikprøve*, og spørger dem i forventning om, at deres svar afspejler hele populationen.

Eksempel 1:

”60% af stockholmerne er imod indførelse af bompenge for biltrafikken i Stockholm”

Fra 3. januar 2006 startede et forsøg i Stockholm, hvor man afkrævede bilister bompenge ved ind- og udkørsel fra den svenske hovedstad. I den anledning havde man spurgt 600 stockholmere om deres holdning til forsøget, og 60% af de adspurgte var imod forsøget. Formålet med undersøgelsen var at belyse stockholmernes holdning til bompenge. Derfor må man formode, at *populationen* var hele Stockholms befolkning. Observationssættet bestod af de 600 svar på spørgsmålet (for, imod, ved ikke), og stikprøven bestod af de 600 stockholmere, som blev spurgt.

Eksempel 2:

På en medicinalvarefabrik producerer de gigtpiller, som skal indeholde en bestemt dosis, f.eks. 8 mg, af det aktive stof. En produktionskontrol foretages ved en dag at måle det præcise dosisindhold i 200 tilfældige piller fra produktionen.

Observationssættet består af 200 tal (dosismålinger).

Populationen er den totale produktion af gigtpiller, og stikprøven er de 200 tilfældigt udtagne piller.

Relevante spørgsmål ved en statistisk undersøgelse under dette punkt er derfor:

Spørgsmål 1:

Hvad er populationen og stikprøven?

Spørgsmål 2:

Er den stikprøve, der bliver lavet statistik på, stor nok? (Ofte er det ikke det, der er problemet, men det er klart, at hvis man ikke spørger ret mange, så ER det et problem.)

Er stikprøven repræsentativ? Systematiske fejl – bias. Her overvejer vi om dem, vi har spurgt, kan bruges til at sige noget generelt om den population, vi vil udtale os om.

Spørgsmål 3:

Er det klart, *hvem* man har spurgt?

Spørgsmål 4:

Vil den måde populationen eller stikprøven er udtaget på give et *repræsentativt* udsnit af popla tionen, dvs. afspejler den i alle henseender de forhold ved populationen, som kan have betydning for resultatet af undersøgelsen? Hvis det ikke er tilfældet, hvilke *skævheder* (bias) kan der være? (Er der nogen grupper, der er underrepræsenteret/overrepræsenteret?)

Er kriterierne klare? Her overvejer vi, om det er klart, hvad der bliver spurgt om.

Spørgsmål 5:

Er det helt veldefineret, hvad der ”svares på” eller hvad data kan sige noget om?

(Hvis spørgsmålet er subjektivt fx om man har det bedre eller dårligere, så er det i høj grad en personlig vurdering, der i lige så høj grad afspejler en holdning. Hvis det er noget, der måles, gøres det så på samme måde? Forskellige svar kan også afspejle forskellige ”roller”, som fx hvis man spørger unge og deres forældre om unge mennesker i Danmark drikker for meget).

Skjulte variable (Konfunderede variable): Her overvejer vi om de variable, undersøgelsen omfatter, kan bruges til at *forklare* de sammenhænge vi ser, eller om der kan inddrages helt andre variable, der kan forklare undersøgelsens udfald. At der kan være skjulte variable, er et gæt, som man kan argumentere for, og som man kan undersøge ved en grundigere undersøgelse.

Spørgsmål 6:

Kan der være andre parametre, som undersøgelsen ikke omfatter, der i virkeligheden kunne forklare resultatet?
(Sammenligner man hårfarve og kost i Godthåb og Odense, så kan man komme til det resultat, at der er en sammenhæng mellem hårfarve og mængden af fisk man indtager. Men det betyder ikke, at hvis man spiser fisk, så bliver man sorthåret. At den skjulte variabel er det geografiske tilhørsforhold (man spiser mere fisk i Grønland, hvor andelen af sorthårede er markant større), kan man undersøge ved at udvide undersøgelse ved at inddrage det geografiske element. Her vil man så finde ud af, at der i Odense isoleret ikke er en sammenhæng mellem hårfarve og mængden af fisk, man spiser og tilsvarende i Godthåb. Det er altså det geografiske tilhørsforhold, der er den skjulte variabel.)

HUSK: Generelt giver en statistisk undersøgelse et fingerpeg om statistiske sammenhænge, men ikke om årsagssammenhænge (kausalitet).

Kapitel 2: Binomialfordelingen

Stokastiske variable (en funktion, hvor man til hvert element i udfaldsrummet har knyttet et tal) bruges til at lave matematiske modeller. En særligt enkel og nyttig type model kaldes binomialfordelingen. Binomialfordelingen er den sandsynlighedsfordeling, som beskriver situationer, hvor samme stokastiske eksperiment med kun to mulige udfald gentages.

Udgangspunktet for binomialfordeling er et stokastisk eksperiment, som har netop to udfald. Vi kalder de to muligheder for succes og fiasko.

Definition: Bernoulli-forsøg

Et Bernoulli-forsøg er et stokastisk eksperiment, som har netop to udfald: Succes og fiasko. Sandsynligheden for succes kaldes *basissandsynligheden.* Denne sandsynlighed er konstant og betegnes p.

Definition: Binomialfordeling

En binomialfordeling $b(n,p)$ optræder, når vi gentager det samme Bernoulli-forsøg n gange og tæller, hvor mange succeser vi har fået. Vi siger, at den stokastiske variabel, $X \sim b(n,p)$, er binomialfordelt og at X er antallet af succeser.

- n kaldes *antalsparameteren* og angiver antallet af gentagelser af *basisforsøget*
- p kaldes *basissandsynligheden* og er sandsynligheden for succes i *basisforsøget*
- X er det samlede antal succeser efter n gentagelser

Sætning: Punktsandsynligheder i binomialfordelingen

Punktsandsynlighederne for en binomialfordelt stokastisk variabel $X \sim b(n,p)$ er givet ved

$$P(X = r) = K(n,r) \cdot p^r \cdot (1-p)^{n-r},$$

hvor

- $P(X = r)$ er sandsynligheden for r succeser i n forsøg
- n er antal forsøg
- p er basissandsynligheden.

Sætning: Middelværdi, varians og spredning i binomialfordelingen

Lad $X \sim b(n,p)$. Da er:

- Middelværdien er givet ved:

$$\mu = n \cdot p$$

- Variansen er givet ved:

$$Var(X) = n \cdot p \cdot (1-p)$$

- Spredningen er givet ved:

$$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$$

Opgaveark 2.1: Binomialfordelingen - indsættelsesøvelse

Indsæt det korrekte begreb/formel/udtryk fra boksen på næste side.

I et binomialforsøg udføres et eksperiment gentagne gange, og hver gang er der netop 2 udfald: _____ eller _____. Antal gentagelser af eksperimentet kaldes _____ n. Sandsynligheden for at få succes, i en enkelt udførelse af forsøget, kaldes _____ p. p skal være den samme hver gang vi udfører eksperimentet, hvilket også formuleres som, at gentagelserne af eksperimentet skal være _____ (kræver for eksempel, at vi lægger tilbage, hvis det handler om træk af kort).

Sandsynligheden for at få succes r gange på n forsøg, kan beregnes med binomialformlen _____. $K(n,r)$ kaldes _____ og den betegner antal kombinationer, hvor jeg får succes r gange ud af n forsøg. Den kan udregnes med formlen _____ hvor n! udtales _____ og betyder _____.

Middelværdien skrives med symbolet _____, som udtales my. Middelværdien er den værdi, vi i gennemsnit vil forvente at få, hvis vi udfører forsøget mange gange, og i binomialfordelingen kan den udregnes med formlen _____. Hvis middelværdien er et helt tal, så er dette tal det mest sandsynlige udfald i eksperimentet. Hvis middelværdien er et kommatal, er det et af de to heltallige nabotal til middelværdien, der er det mest sandsynlige (eventuelt begge). Spredningen skrives med symbolet _____, som udtales sigma, og i binomialfordelingen kan den udregnes med formlen _____. Denne værdi fortæller, hvor meget den stokastiske variabel spreder sig ud fra middelværdien. Et udfald kaldes _____, hvis udfaldet ligger inden for 2 spredninger fra middelværdien, og _____, hvis den ligger mere end 3 spredninger fra middelværdien.

Exceptionelt	succes	basissandsynligheden	$K(n,r) = \frac{n!}{r!(n-r)!}$
$\sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$	fiasko	$P(X=r) = K(n,r) \cdot p^r \cdot (1-p)^{n-r}$	binomialkoefficienten
uafhængige	n fakultet	$n \cdot p$	μ
normalt	antalsparameter	$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots\cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$	σ

Kapitel 3: Binomialtest

I dette afsnit vil vi forklare, hvordan man kan anvende binomialfordelingen i forbindelse med *hypotesetest*. Dette er et redskab, som vi bruger til at vurdere forskellige påstande på grundlag af en *stikprøve*, der er udtaget fra en *population*, der som nævnt i kapitel 1, er den gruppe, som undersøgelsen gerne skulle sige noget.

Vil man f.eks. undersøge noget om alle bilejere i Danmark, er dette populationen. Da det både er dyrt og besværligt at se på alle bilejere, vil man udvælge en delmængde af populationen, som jo kaldes for stikprøven. Det kunne f.eks. være 100 danske bilejere.

Det er vigtigt, at stikprøven er repræsentativ i forhold til populationen. Vil man gerne sige noget om alle bilejere på tværs af alder, køn, etnicitet, lønindtægt, geografiske tilhørsforhold, osv., nytter det f.eks. ikke noget, at man indsamler sine data ved at spørge kunderne hos en lokal Porsche-forhandler.

Stikprøven udtager man for at kunne udtale sig om hele populationen. Man skal være forsigtig med at udtage en meget lille stikprøve, for så bliver stikprøvens evne til at sige noget om populationen meget ringe. I forbindelse med opinionsundersøgelser, spørger man typisk mellem 1000 og 2000 personer, og dette er som regel nok til at give et fornuftigt billede af selv ganske store populationer.

En *binomialtest* er en hypotesetest, som kan anvendes i de situationer, hvor det er rimeligt at antage, at stikprøveresultaterne følger en binomialfordeling. Det betyder, at vi kun kan se på situationer, hvor vi klart kan definere en succes og en fiasko.

Egentlig siger man, at binomialfordelingen kun kan bruges, hvis binomialforsøget er *med tilbagelægning*, fordi de enkelte eksperimenter skal være uafhængige. Det vil betyde, at hver gang vi har undersøgt en dansk bilejer, skal vedkommende 'puttes tilbage i bunken', før man finder den næste bilejer, man vil undersøge. I praksis kan stikprøver *uden tilbagelægning* dog behandles som stikprøver med tilbagelægning, hvis stikprøven maksimalt udgør 10% af populationen.

En binomialtest tager udgangspunkt i et binomialforsøg, og i begge test begynder man med at formulere en *nulhypotese*.

Eksempler på nulhypoteser kunne være:

1. Der er gevinst på mindst 20% af skrabelodderne fra Danske Spil.
2. Børns rygevaner afhænger ikke af forældrenes rygevaner.
3. Behandling med præparat X nedsætter risikoen for blodpropper.

Læg mærke til at nulhypoteserne ikke er formuleret som spørgsmål, men som udsagn, der kan accepteres eller forkastes.

Når man skal udføre en hypotesetest, sker det med udgangspunkt i en antagelse om, at nulhypotesen er sand. Det vil sige, at de sandsynlighedsberegninger, man foretager, sker med udgangspunkt i den basissandsynlighed, der kan læses ud af nulhypotesen.

Tosidet og etsidet binomialtest

Der findes to typer af binomialtest, nemlig en tosidet binomialtest og en etsidet binomialtest. Inden vi vender os mod den tosidede test, ser vi på to begreber som anvendes, når man skal afgøre om en nulhypotese skal accepteres eller forkastes.

Definition: Acceptmængde og kritisk mængde

I forbindelse med en binomialtest er

- *acceptmængden* de udfald, hvor nulhypotesen accepteres
- *den kritiske mængde* de udfald, hvor nulhypotesen forkastes

Hvordan acceptmængden og den kritiske mængde beregnes, afhænger både af, hvilken type test, der er tale om, og hvilket signifikansniveau, der anvendes.

Definition: Tosidet binomialtest

I en tosidet binomialtest er nulhypotesen formuleret således, at den udtrykker, at basissandsynligheden *netop* har en bestemt værdi.

$$H_0 : p = p_0$$

Acceptmængden er givet $\{u_v, \dots, u_h\}$, hvor u_v er det mindste udfald, som accepteres og u_h er det største udfald, som accepteres.

Ved et signifikansniveau på α gælder, at

- u_v er den mindste værdi af X, så $P(X \leq u_v) > \frac{\alpha}{2}$
- u_h er den største værdi af X, så $P(X \geq u_h) > \frac{\alpha}{2}$

Definition: Venstresidet binomialtest

I en venstresidet binomialtest er nulhypotesen formuleret således, at den udtrykker, at basissandsynligheden *mindst* antager en bestemt værdi.

$$H_0 : p \geq p_0$$

Acceptmængden er givet ved $\{u_v, \dots, u_{\max}\}$, hvor u_v er det mindste udfald, som accepteres. Ved et signifikansniveau på α gælder, u_v er den mindste værdi af X, så $P(X \leq u_v) > \alpha$.

Definition: Højresidet binomialtest

I en højresidet binomialtest er nulhypotesen formuleret således, at den udtrykker, at basissandsynligheden *højst* antager en bestemt værdi.

$$H_0 : p \leq p_0$$

Acceptmængden er givet ved $\{u_v, \dots, u_h\}$, hvor u_h er det største udfald, som accepteres. Ved et signifikansniveau på α gælder, u_h er den højeste værdi af X, så $P(X \geq u_h) > \alpha$.

Til sidst kan vi opsummere metoden, når vi skal foretage en binomialtest:

1. Opstil en nulhypotese. Den formuleres altid, så man håber at få den forkastet.

2. Afgør på baggrund af nulhypotesen, om der er tale om en tosidet, venstresidet eller højresidet test.

3. Bestem acceptmængden og den kritiske mængde. Det er her, vi skal foretage beregninger med binomialfordelingen. Husk, at resultatet afhænger af signifikansniveauet.

4. Se om udfaldet, der undersøges, ligger i acceptmængden. Hvis dette er tilfældet, accepteres hypotesen. Hvis ikke forkastes hypotesen.

Opgaveark 3.1: Mix & match

Forbind begreberne i venstre søjle med definitionerne i højre søjle.

BEGREB	**Forklaring**
1. Stikprøve	a. Når den kritiske mængde falder til højre på tallinjen. Typisk i spørgsmål hvor man undersøger om noget er gået frem eller der er flere end forventet. Så vil testsandsynligheden blive udregnet som: $P(Teststørrelse \leq X \leq samlet\ antal\ i\ stikprøven)$
2. Nulhypotese	b. Den mængde af personer, dyr, produkter, hændelser osv., som vi gerne vil kunne sige noget om på baggrund af vores stikprøve. Den store gruppe.
3. Population	c. Det antal vi har observeret, for eksempel ved en rundspørge. Vores antal successer.
4. Signifikansniveau	d. Hvis vores teststørrelse (observation) falder inden for denne mængde, så må vi tro på nulhypotesen. Vi accepterer den.
5. Teststørrelse	e. Den hypotese vi vælger at stole på indtil den eventuelt forkastes. Formuleres altid som at der ikke er nogen ændring (*partiet er ikke gået frem, partiet er ikke gået tilbage*)
6. Testsandsynlighed	f. Når den kritiske mængde falder til venstre på tallinjen. Typisk i spørgsmål hvor man undersøger om noget er gået tilbage eller der er færre end forventet. Så vil testsandsynligheden blive udregnet som $P(0 \leq X \leq Teststørrelsen)$
7. Kritisk mængde	g. En mindre gruppe af individer, som vi undersøger nærmere for at kunne sige noget om hele populationen (fordi det er for dyrt, for tidskrævende at spørge alle)
8. Acceptmængde	h. Grænsen for hvor lidt sandsynlig vores teststørrelse må være, før vi er nødt til at forkaste nulhypotesen. Sættes typisk til at være 5%, men kan også være 1% eller 10%.
9. Venstresidet test	i. Sandsynligheden for at få det vi har observeret (vores teststørrelse), hvis altså nulhypotesen er sand.
10. Højresidet test	j. Hvis vores teststørrelse (observation) falder inden for denne mængde, så er vi nødt til at forkaste vores nulhypotese. Det er for usandsynligt at have observeret det vi har observeret og stadig tro på nulhypotesen.

Opgaveark 3.2: Venstresidet eller højresidet test?

Afgør for de 3 opgaver nedenunder om nulhypotesen lægger op til en højresidet test (*flere successer vil være kritisk for nulhypotesen*) eller en venstresidet test (*færre successer vil være kritisk for nulhypotesen*).

a:
I 2018 løb Bryan Rosling med 20% af stemmerne i en afstemning om at være filmbranchens lækreste mand. I 2019 blev 750 mennesker spurgt, hvoraf 200 bekræftede at de ville stemme på Bryan Rosling igen. Vi vil teste nulhypotesen ”Bryan Roslings popularitet er ikke steget. Der er stadig højst 20%, der vil stemme på ham”.

b:
I DK’s julelotteri bliver der lovet, at der er gevinst på mindst 15% af skrabelodderne. Eleverne køber 450 skrabelodder, og det viser sig, at der er gevinst på 60 skrabelodder. Vi vil teste nulhypotesen ”Andelen af skrabelodder med gevinst er ikke lavere end 15%”.

c:
I en gruppe på 50 medarbejdere på et rådhus konstateres 9 tilfælde af allergi. Arbejdstilsynet regner med, at der i gennemsnit er 10 % med allergi i befolkningen. Vi vil gerne teste nulhypotesen: Der er ikke flere tilfælde af allergi på rådhuset end andre steder.

Prøv for de 2 opgaver nedenunder at opstille en nulhypotese (hvad lægger stikprøveundersøgelsen op til at undersøge, og hvordan formulerer vi så nulhypotesen?). Overvej også om det så vil være en højresidet eller venstresidet test.

d:
Ved sidste valg fik PowerP Partiet 42% af stemmerne. I en stikprøveundersøgelse bliver 2000 mennesker spurgt om de vil stemme på partiet, hvis der var valg i morgen. 900 mennesker svarer ja.

Nulhypotese:

e:
Ved sidste valg fik partiet med forkortelsen GOT 24% af stemmerne. I en stikprøveundersøgelse bliver 1600 mennesker spurgt om de vil stemme på partiet, hvis der var valg i morgen. 100 mennesker svarer ja.

Nulhypotese:

<u>Hvis I har mere tid:</u>

f:
Hvad vil n og p være i hvert af eksemplerne, når vi skal bruge binomialfordelingen til at undersøge testsandsynligheden?

Opgaveark 3.3.1: Enkeltsidet binomialtest. GRØN

Opgave 1:

Et byggemarked vil købe et stort parti skruer fra en virksomhed. Handlen bliver dog kun til noget, hvis virksomheden kan leve op til sin egen påstand om, at højst 3% af skruerne er med fejl. For at undersøge det tager byggemarkedet en tilfældig stikprøve med 800 skruer. Det viser sig, at 31 af skruerne har fejl.

Vi vil teste nulhypotesen ”Højst 3% af skruerne har fejl” på et signifikansniveau 5%.

Før vi starter testen, så overvej lige om dette vil være et venstresidet test eller et højresidet test (venstresidet = vi undersøger om der er færre. Højresidet = vi undersøger om der er flere)

Trin 1: Opskriv nulhypotesen

Denne har vi allerede fået givet i opgaveformuleringen: *”Højst 3% af skruerne har fejl”*

Hvis vi vil formulere det negativt, ligesom med eksemplet med partifremgang og partitilbagegang, kan vi skrive: *Antallet af skruer, der har fejl, er ikke højere end 3%*

Trin 2: Fastlæg signifikansniveau

5% (opgivet i opgaven)

Trin 3: Testsandsynligheden: Hvor sandsynligt er vores udfald givet at nulhypotesen er sand?

A: Bestemmelse af, hvor sandsynlig vores teststørrelse på 31 skruer er vha. binomialfordelingen:

- Hvad kommer sandsynlighedsparameteren p til at være i dette forsøg? (Hvad er sandsynligheden for at en tilfældig skrue har fejl, hvis nulhypotesen er korrekt?)
- Hvad skal antalsparameteren n være? (det er antallet af skruer i vores stikprøve)
- Beregn sandsynligheden for at få 31 skruer eller derover med fejl givet at nulhypotesen er sand (Brug WordMats sandsynlighedslommeregner, hvor du vælger fordeling → binomialfordeling → Indtast n og p):
- $P(\ 31 \leq X \ \leq \ \ 800\ ) =$ Husk at oversætte dette tal til procent ved at gange med 100.

Trin 4: Konklusion - forkaster vi eller ej?

Er sandsynligheden af vores observation (resultatet fra trin 3) lavere end signifikansniveauet, er det for usandsynligt at få denne observation og samtidig tro på nulhypotesen, så vi forkaster. Er den højere, kan vi ikke forkaste hypotesen.

Hvad kan du nu konkludere?

Ekstra spørgsmål:

Bestem den kritiske værdi

(Prøv at indsætte forskellige teststørrelser i stedet for de 31. Hvornår ryger vi under de 5%?)

Opgave 2:

Fra myndighederne i Danmark er kravet til PostNord, at mindst 93% af almindelige breve skal nå frem inden for 5 hverdage. En test viste, at blandt 100 afsendte breve nåede 82 breve frem til tiden.

Vi vil teste nulhypotesen: ”Mindst 93% af breve sendt med PostNord når frem til tiden” på signifikansniveauet 1%

Før vi starter testen, så overvej lige om dette vil være et venstresidet test eller et højresidet test (venstresidet = vi undersøger om der er færre. Højresidet = vi undersøger om der er flere)

Trin 1: Opskriv nulhypotesen

Denne har vi allerede fået givet i opgaveformuleringen*: ”Mindst 93% af brevene sendt med PostNord når frem til tiden”.*

Hvis vi vil formulere det negativt, ligesom med eksemplet med partifremgang og partitil-bagegang, kan vi skrive: *Antallet af breve, der når frem til tiden, er ikke lavere end 93%.*

Trin 2: Fastlæg signifikansniveau

1% (oplyst i opgaven)

Trin 3: Hvor sandsynligt er vores udfald givet at nulhypotesen er sand?

B: Bestemmelse af, hvor sandsynlig vores teststørrelse på 82 breve er vha. binomialfordelingen:

- Hvad kommer sandsynlighedsparameteren p til at være i dette forsøg? (Hvad er sandsynligheden for at et tilfældigt valgt brev når frem til tiden, hvis nulhypotesen er korrekt?)
- Hvad skal antalsparameteren n være? (hvor mange breve er der i vores stikprøveundersøgelse?)
- Beregn sandsynligheden for at 82 breve eller derunder når frem til tiden, hvis nulhypotesen er sand (Brug en sandsynlighedslommeregner, hvor du vælger fordeling binomialfordeling Indtast n og p):
- $P(0 \leq X \leq 82) =$ Husk at oversætte dette tal til procent ved at gange med 100.

Trin 4: Konklusion - forkaster vi eller ej?

Er sandsynligheden af vores observation (resultatet fra trin 3) lavere end signifikansniveauet, er det for usandsynligt at få denne observation og samtidig tro på nulhypotesen, så vi forkaster. Er den højere, kan vi ikke forkaste hypotesen.

Hvad kan du nu konkludere?

Ekstra spørgsmål:

- Bestem den kritiske mængde for signifikansniveauet 1%

(Prøv at indsætte forskellige teststørrelser i stedet for de 82. Hvornår ryger vi under de 1%?)

Opgaveark 3.3.2: Enkeltsidet binomialtest. GUL

Opgave 1:

Et byggemarked vil købe et stort parti skruer fra en virksomhed. Handlen bliver dog kun til noget, hvis virksomheden kan leve op til sin egen påstand om, at højst 3% af skruerne er med fejl. For at undersøge det tager byggemarkedet en tilfældig stikprøve med 800 skruer. Det viser sig, at 31 af skruerne har fejl.

Vi vil teste nulhypotesen ”Højst 3% af skruerne har fejl” på et signifikansniveau 5%.

Før vi starter testen, så overvej lige om dette vil være et venstresidet test eller et højresidet test (venstresidet = vi undersøger om der er færre. Højresidet = vi undersøger om der er flere)

Trin 1: Opskriv nulhypotesen

Trin 2: Fastlæg signifikansniveau

Trin 3: Testsandsynligheden: Hvor sandsynligt er vores udfald givet at nulhypotesen er sand?

A: Bestemmelse af, hvor sandsynlig vores teststørrelse på 31 skruer er vha. binomialfordelingen:

- Hvad kommer sandsynlighedsparameteren p til at være i dette forsøg? (Hvad er sandsynligheden for at en tilfældig skrue har fejl, hvis nulhypotesen er korrekt?)
- Hvad skal antalsparameteren n være?
- Beregn sandsynligheden for at få 31 skruer eller derover med fejl givet at nulhypotesen er sand (Brug en sandsynlighedslommeregner, hvor du vælger fordeling → binomialfordeling → Indtast n og p):
- $P(\,31 \leq X \;\leq \; ?\;\;) =$

Trin 4: Konklusion - forkaster vi eller ej?

Er sandsynligheden af vores observation lavere end signifikansniveauet, er det for usandsynligt at få denne observation og samtidig tro på nulhypotesen, så vi forkaster. Er den højere, kan vi ikke forkaste hypotesen.

Hvad kan du nu konkludere?

Ekstra spørgsmål:

- Bestem den kritiske værdi ved at indsætte forskellige teststørrelser i stedet for de 31. Hvornår ryger vi under de 5%?

Opgave 2:

Fra myndighederne i Danmark er kravet til PostNord, at mindst 93% af almindelige breve skal nå frem inden for 5 hverdage. En test viste, at blandt 100 afsendte breve nåede 82 breve frem til tiden.

Vi vil teste nulhypotesen: ”Mindst 93% af breve sendt med PostNord når frem til tiden” på signifikansniveauet 1%

Før vi starter testen, så overvej lige om dette vil være et venstresidet test eller et højresidet test (venstresidet = vi undersøger om der er færre. Højresidet = vi undersøger om der er flere)

Trin 1: Opskriv nulhypotesen

Trin 2: Fastlæg signifikansniveau

Trin 3: Hvor sandsynligt er vores udfald givet at nulhypotesen er sand?

B: Bestemmelse af, hvor sandsynlig vores teststørrelse på 82 breve er vha. binomialfordelingen:

- Hvad kommer sandsynlighedsparameteren p til at være i dette forsøg? (Hvad er sandsynligheden for at et tilfældigt valgt brev når frem til tiden, hvis nulhypotesen er korrekt?)
- Hvad skal antalsparameteren n være?
- Beregn sandsynligheden for at 82 breve eller derunder når frem til tiden, hvis nulhypotesen er sand (Brug WordMats sandsynlighedslommeregner, hvor du vælger fordeling → binomialfordeling → Indtast n og p):
- $P(? \leq X \leq 82) \quad =$

Trin 4: Konklusion - forkaster vi eller ej?

Er sandsynligheden af vores observation lavere end signifikansniveauet, er det for usandsynligt at få denne observation og samtidig tro på nulhypotesen, så vi forkaster. Er den højere, kan vi ikke forkaste hypotesen.

Hvad kan du nu konkludere?

Ekstra spørgsmål:

- Bestem den kritiske mængde for signifikansniveauet 1% (hvilke teststørrelser fører til forkastelse af hypotesen og hvilke gør at vi accepterer nulhypotesen?)

Opgaveark 3.3.3: Enkeltsidet binomialtest. RØD

Opgave 1:

Et byggemarked vil købe et stort parti skruer fra en virksomhed. Handlen bliver dog kun til noget, hvis virksomheden kan leve op til sin egen påstand om, at højst 3% af skruerne er med fejl. For at undersøge det tager byggemarkedet en tilfældig stikprøve med 800 skruer. Det viser sig, at 31 af skruerne har fejl.

Vi vil teste nulhypotesen ”Højst 3% af skruerne har fejl” på et signifikansniveau 5%.

Før vi starter testen, så overvej lige om dette vil være et venstresidet test eller et højresidet test

Trin 1: Opskriv nulhypotesen

Trin 2: Fastlæg signifikansniveau

Trin 3: Testsandsynligheden: Hvor sandsynligt er vores udfald givet at nulhypotesen er sand?

A: Bestemmelse af, hvor sandsynlig vores teststørrelse på 31 skruer er vha. binomialfordelingen:

- Hvad kommer sandsynlighedsparameteren p til at være i dette forsøg?
- Hvad skal antalsparameteren n være?
- Beregn sandsynligheden for at få 31 skruer eller derover med fejl givet at nulhypotesen er sand (Brug sandsynlighedslommeregner)
- $P(\leq X \leq) =$

Trin 4: Konklusion - forkaster vi eller ej?

Ekstra spørgsmål:

- Bestem den kritiske værdi: hvilke teststørrelser fører til at vi forkaster nulhypotesen? Hvilke fører til at vi accepterer?

Opgave 2:

Fra myndighederne i Danmark er kravet til PostNord, at mindst 93% af almindelige breve skal nå frem inden for 5 hverdage. En test viste, at blandt 100 afsendte breve nåede 82 breve frem til tiden.

Vi vil teste nulhypotesen: ”Mindst 93% af breve sendt med PostNord når frem til tiden” på signifikansniveauet 1%

Før vi starter testen, så overvej lige om dette vil være et venstresidet test eller et højresidet test

Trin 1: Opskriv nulhypotesen

Trin 2: Fastlæg signifikansniveau

Trin 3: Hvor sandsynligt er vores udfald givet at nulhypotesen er sand?

B. Bestemmelse af, hvor sandsynlig vores teststørrelse på 82 breve er vha. binomialfordelingen:

- Hvad kommer sandsynlighedsparameteren p til at være i dette forsøg?
- Hvad skal antalsparameteren n være?
- Beregn sandsynligheden for at 82 breve eller derunder når frem til tiden, hvis nulhypotesen er sand (Brug sandsynlighedslommeregner)
- $P(\leq X \leq) \quad =$

Trin 4: Konklusion - forkaster vi eller ej?

Ekstra spørgsmål:

- Bestem den kritiske mængde for signifikansniveauet 1% (hvilke teststørrelser fører til forkastelse af hypotesen og hvilke gør at vi accepterer nulhypotesen?)

Opgaveark 3.4: Gruppepræsentationer

Produktkrav: I skal være klar til at præsentere jeres løsninger i næste modul, hvor I fremlægger for mig i mindre grupper (for at give mere tid til, at man kan stille spørgsmål, og alle kan få sagt noget).

Opgave 1: Er partiet gået tilbage?

Partiet 'Red-verdens-pandaer' fik 11% af stemmerne ved sidste valg. Ved en rundspørge blandt 1000 tilfældigt valgte mennesker er der 89 mennesker, der siger, at de ville stemme på partiet, hvis der var valg i morgen. 89 ud af 1000 mennesker er jo kun 8,9%, men kan vi så sige, at partiet er gået tilbage? Er det en signifikant forskel?

Vi undersøger det ved en binomialtest med signifikansniveau 5%:

Trin 1: Opskriv nulhypotesen (den hypotese, som vi må tro på indtil videre)

Trin 2: Fastlæg signifikansniveau

Trin 3: Hvor sandsynligt er vores udfald, hvis nulhypotesen er sand?

- Hvis nulhypotesen er sand (at partiet ikke er gået tilbage), så må sandsynligheden for at en tilfældigt valgt person svarer ja til partiet være 11% (tilslutningen ved sidste valg).
- Når vi nu skal beregne hvor sandsynlig vores observation er, skal vi derfor fastlægge sandsynlighedsparameteren p til hvad?
- Hvad skal antalsparameteren n være?
- Beregn sandsynligheden for, at 89 mennesker eller færre vil svare ja til partiet, hvis altså nulhypotesen er sand (Brug WordMats sandsynlighedslommeregner, hvor du vælger fordeling → binomialfordeling → n=1000 og p=0.11):
- $P(0 \leq X \leq 89) =$

Trin 4: Konklusion - forkaster vi eller ej?

Er sandsynligheden af vores observation lavere end signifikansniveauet, er det for usandsynligt at få denne observation og samtidig tro på nulhypotesen, så vi forkaster. Er den højere, kan vi ikke forkaste hypotesen.

Hvad kan du nu konkludere?

Den kritiske mængde:

- Bestem den kritiske mængde ved at se på, hvornår sandsynligheden falder under signifikansniveauet på 5%. (vink: du ved, at 89 fører til forkastelse af hypotesen, så prøv at kigge på værdier der er højere end 89, men stadig lavere end middelværdien, som jo er det mest sandsynlige. Hvor ligger grænsen for de 5%)?

Tegn den kritiske mængde samt acceptmængden ind på en tallinje:

---

0 900

Opgave 2: Er partiet gået frem?

Partiet ”Gratis-Juice-til-alle” fik 30% af stemmerne ved sidste valg. Ved en rundspørge blandt 900 tilfældigt valgte mennesker er der 310 mennesker, der siger, at de ville stemme på partiet, hvis der var valg i morgen. 310 ud af 900 mennesker er jo cirka 34,4%, men kan vi så sige, at partiet er gået frem? Er det en signifikant forskel?

Vi undersøger det ved en binomialtest med signifikansniveau 5%:

Trin 1: Opskriv nulhypotesen (den hypotese som vi må tro på indtil videre)

Trin 2: Fastlæg signifikansniveau

Trin 3: Hvor sandsynligt er vores udfald, hvis nulhypotesen er sand?

- Hvis nulhypotesen er sand (at partiet ikke er gået frem), så må sandsynligheden for at en tilfældig valgt person svarer ja til at stemme på partiet være 30% (tilslutningen ved sidste valg).
- Når vi nu skal beregne hvor sandsynlig vores observation er, skal vi derfor fastlægge sandsynlighedsparameteren p til hvad?
- Hvad skal antalsparameteren n være?
- Beregn sandsynligheden for at mindst 310 mennesker vil svare partiet AA, hvis altså nulhypotesen er sand (Brug WordMats sandsynlighedslommeregner, hvor du vælger fordeling → binomialfordeling → n=900 og p=0.30):
- $P(310 \leq X \leq 900) =$

Trin 4: Konklusion - forkaster vi eller ej?

Er sandsynligheden af vores observation lavere end signifikansniveauet, er det for usandsynligt at få denne observation og samtidig tro på nulhypotesen, så vi forkaster. Er den højere, kan vi ikke forkaste hypotesen.

Hvad kan du nu konkludere?

Den kritiske mængde:

- Bestem den kritiske mængde ved at se på, hvornår sandsynligheden falder under signifikansniveauet på 5%. (vink: du ved, at 310 fører til forkastelse af hypotesen, så prøv at kigge på værdier der er lavere end 310, men stadig højere end middelværdien, som jo er det mest sandsynlige. Hvor ligger grænsen for de 5%)?
- Tegn den kritiske mængde samt acceptmængden ind på en tallinje:

---

0 900

Opgaveark 3.5: Øvelser til dobbeltsidet test

Opgave 1:

Hele USA er blevet spurgt, hvilken Harry Potter film de bedst kunne lide og Prisoner of Azkaban fik 48% af stemmerne. Vi ønsker at undersøge, om filmens popularitet har ændret sig.

Trin 1: Opstil en nulhypotese for undersøgelsen.

Der foretages en vælgerundersøgelse blandt 1005 personer, der viser, at 510 personer synes, at Prisoner of Azkaban er den bedste Harry Potter film.

Trin 2: Benyt et dobbeltsidet (tosidet) binomialtest med et 5% signifikansniveau til at vurdere, om populariteten har ændret sig.

Prøv at følge trinnene nedenunder:

1) Nulhypotesen (den har vi allerede skrevet under trin 1)

2) Signifikansniveauet ifølge opgaveformuleringen: - og hvad skal jeg nu være opmærksom på, når det er en dobbeltsidet test?

3) Testsandsynligheden

Vi skal have gang i WordMats Excel-skabelon og har dermed brug for at vide følgende:

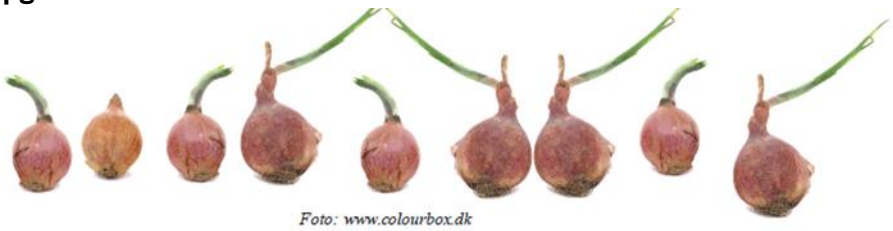
- Hvad bliver n i stikprøveundersøgelsen?
- Hvad må sandsynlighedsparameteren p være, hvis vi skal tro på nulhypotesen?
- Udregn middelværdien og brug det til at afgøre hvilken side vores antal successer ligger til (og dermed hvilken sandsynlighed vi skal udregne)

$$\mu =$$

$$P(\quad \leq X \leq \quad) =$$

4) Konklusion: Kan vi forkaste eller skal vi acceptere?

Opgave 2:[1]



Et gartneri reklamerer med, at for en bestemt slag løg vil netop 9 ud af 10 løg spire. En kunde køber 50 af de pågældende løg fra gartneriet. Det viser sig, at kun 42 af kundens indkøbte løg spirer.

Trin 1: Benyt et dobbeltsidet (tosidet) binomialtest med et 5% signifikansniveau til at vurdere om gartneriets reklame er troværdig.

1) Opskriv nulhypotesen:

2) Signifikansniveauet:

3) Testsandsynligheden

- Hvad bliver n i stikprøveundersøgelsen?
- Hvad må sandsynlighedsparameteren p være, hvis vi skal tro på nulhypotesen?
- Udregn middelværdien og brug det til at afgøre hvilken side vores antal successer ligger til (og dermed hvilken sandsynlighed vi skal udregne)

$$\mu =$$

$$P(\quad \leq X \leq \quad) =$$

4) Konklusion

[1] Undervisningsminsteriet (Marts 2020) Vejledende Enkeltopgaver, Matematik stx B-niveau. Emu.dk https://emu.dk/sites/default/files/2020-03/Vejledendeopgaver%20stx%20B-niveau%202017%20reform%20-%20Marts%202020.pdf

Opgave 3:

En af mine venner sagde forleden, at da han var på toilettet midt om natten, tændte han ikke lyset, fordi han gerne ville bevare sit nattesyn. Om dagen er det lige meget med lys, men der rammer han alligevel kun ned i kummen med 78% af tisdråberne. Vi ønsker at undersøge, om mængden af tis ændrer sig om natten. En bestemt nat tisser han som normalt, uden lys, men han har sat et night vision kamera op på toilettet (han bor alene i øvrigt) og ser det næste dag. Blandt de 988 dråber hans tissetår bestod af, ramte 730 dråber i toilettet

- Benyt et binomialtest med et 1% signifikansniveau til at vurdere om mængden af dråber der går i toilettet har ændret sig.
- Bestem den kritiske mængde.

Kapitel 4: Konfidensintervaller

Læs s. 29-32 i ”Sandsynlighedsregning og statistik med binomialfordelingen”, Katja Kofod Svan og Olav Lyndrup, Januar 2019.

https://emu.dk/sites/default/files/2019-05/Htx%20-%20matematik%20-%20Binomialfordelingen%20Februar%202019.pdf

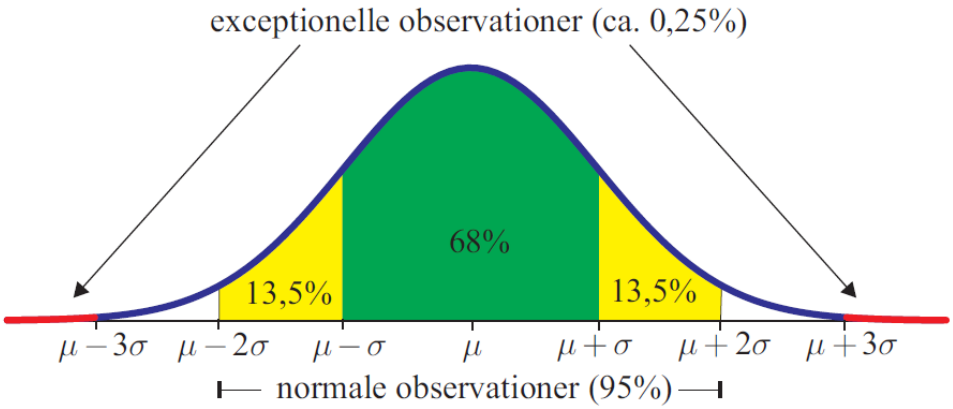
I det følgende er de vigtigste definitioner, figurer og sætninger fra materialet, så de kan anvendes i løsningen af de tilhørende opgaver:

Definition: Estimat for basissandsynlighed

Vi betegner estimatet for basissandsynligheden, p, og det gælder, at:

$$\hat{p} = \frac{Antal\ succeser\ i\ stikprøven}{Størrelsen\ af\ stikprøven}$$

Normalfordelingen:



Formel for 95%-konfidensinterval

$$I_{95} = [\hat{p} - usikkerheden\ ;\ \hat{p} + usikkerheden]$$

Usikkerheden kan beregnes således:

$$u = 2 \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$$

Dermed er 95%-konfidensintervallet givet ved:

$$I_{95} = \left[\hat{p} - 2 \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\ ;\ \hat{p} + 2 \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right]$$

Hvor $\hat{p} = \frac{Antal\ succeser\ i\ stikprøven}{Størrelsen\ af\ stikprøven}$ og n er stikprøvens størrelse

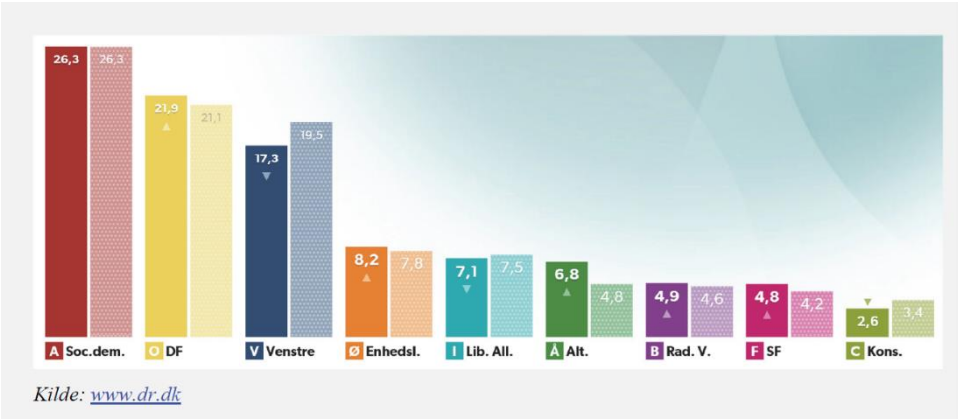
Opgaveark 4.1. Øvelser til konfidensintervaller:

Opgave 1:

Tjekspørgsmål:

- I hvilke situationer udregner man konfidensintervaller? Hvorfor?
- Hvorfor hedder det et konfidensinterval? Måske kan det hjælpe at tænke på det tilsvarende ord på engelsk, *confidence*…
- Når man udregner et 95%-konfidensinterval, hvad betegner de 95% så?
- Hvad står $\hat{p}$ (udtales 'p hat') for? Hvilken formel bruger man til at beregne den?
- Hvilken formel bruger man til at beregne 95%-konfidensintervallet?
- Hvilken formel bruger man til at beregne den statistiske usikkerhed?
- Der er nævnt nogle krav til antalsparameteren n og basissandsynligheden p for at kunne bruge formlen. Hvad er de? (se første linje i sætning 4.3)
- Hvad sker der med den statistiske usikkerhed, når vi øger antallet af adspurgte i min stikprøve?

Opgave 2:[2]



Folketingsvalget 2015 (højre kolonne), meningsmåling 2016 (venstre kolonne).

a) Bestem usikkerheden på partiet Alternativets vælgertilslutning, og afgør om de er gået frem siden valget, idet der er 1578 personer i stikprøven.

Opgave 3:

a) Vis ud fra formlen for usikkerhed, $u = 2 \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$ at man skal firedoble stikprøvestørrelsen, hvis man skal halvere usikkerheden.

Opgave 4:

I 2011 viste en stor undersøgelse, at 64% af voksne danskere regelmæssig dyrkede motion. I 2016 udtog man en stikprøve på 400 voksne danskere og spurgte dem, om de dyrkede regelmæssig motion. I stikprøven var der 284, der dyrkede regelmæssig motion.

[2] Opgave 2,3, 4 og 5 er hentet fra: Svan, K. K. & Lyndrup, O. (2019). Sandsynlighedsregning og statistik med binomialfordelingen. Emu.dk

Vi antager i det følgende, at den sande værdi af andelen af alle voksne danskere, der i 2011 dyrkede motion, var 64%.

a) Bestem ud fra stikprøven i 2016 et 95%-konfidensinterval for andelen af voksne danskere, der dyrker regelmæssig motion.

b) Afgør, om andelen af voksne danskere, der dyrker regelmæssig motion, har ændret sig.

Opgave 5:

Ved en meningsmåling blandt 1200 tilfældigt udvalgte vælgere viste det sig, at 18% ville stemme på liste CC.

a) Angiv det tilhørende 95% - konfidensinterval for p.

Ved en meningsmåling blandt 2000 tilfældigt udvalgte vælgere viste det sig, at 18% ville stemme på liste CC.

b) Bestem det tilhørende konfidensinterval for p.

Antag, at liste CC fik 16% af stemmerne ved sidste valg.

c) Hvilken konklusion vil man så drage af hver af de to meningsmålinger?

d) Hvorfor er der forskel på konklusionerne, selv om begge undersøgelser viste en tilslutning på 18%?

Antag, at liste CC fik 21% af stemmerne ved sidste valg.

e) Hvilken konklusion kan man så drage af hver af de to meningsmålinger?

f) Bestem den usikkerhed, der er på hver af de to meningsmålinger.

Opgave 6: [3]

I 2011 viste en meget stor undersøgelse, at 34% af de 8-årige i Danmark havde en mobiltelefon. I 2016 udtog man en stikprøve på 200 blandt 8-årige i Danmark. I stikprøven havde 40% en mobiltelefon. Vi antager i det følgende, at 34% af den samlede population af 8-årige i 2011 havde en mobiltelefon.

a) Bestem ud fra stikprøven fra 2016 et 95%-konfidensinterval for andelen af de 8-årige med mobiltelefon, og gør på baggrund heraf rede for, at man ikke ud fra stikprøven kan konkludere, at andelen af 8-årige med mobil har ændret sig fra 2011 til 2016.

b) På baggrund af en anden stikprøve fra 2016 hvori andelen af 8-årige med mobil også var 40%, kunne man ud fra et 95%-konfidensinterval konkludere, at andelen af 8-årige med mobil har ændret sig siden 2011. Hvor stor må denne anden stikprøve mindst have været?

[3] Undervisningsminsteriet (Marts 2020) Vejledende Enkeltopgaver, Matematik stx B-niveau. Emu.dk https://emu.dk/sites/default/files/2020-03/Vejledendeopgaver%20stx%20B-niveau%202017%20reform%20-%20Marts%202020.pdf

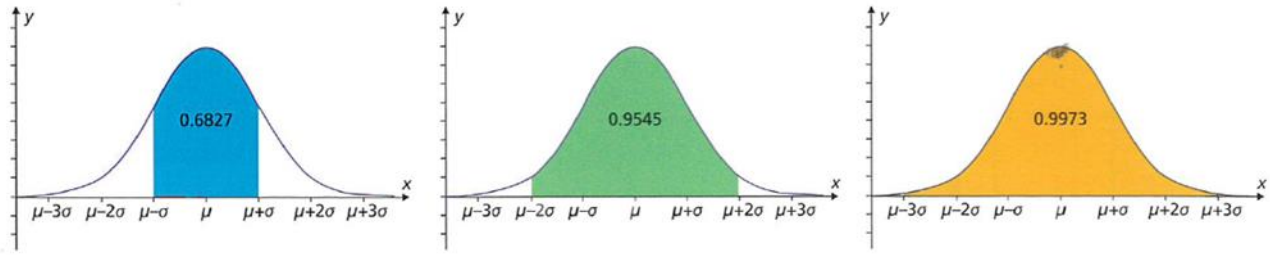
Opgaveark 4.2.: Konfidensinterval for stikprøveandel – Det matematiske argument for formlen.

Vi vil prøve at kigge på beviset for sætningen om, at et 95%-konfidensinterval for sandsynlighedsparameteren p i en binomialfordeling med størrelsen n og estimatet $\hat{p}$ kan bestemmes ved formlen:

$$I_{95} = \left[\hat{p} - 2 \cdot \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot (1-\hat{p})}{n}}; \hat{p} + 2 \cdot \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot (1-\hat{p})}{n}}\right]$$

Prøv at skrive forklarende tekst der hvor der mangler i beviset nedenunder:

Beviset for 95%-konfidensintervallet bygger på følgende observationer omkring sandsynlighederne i normalfordelingen:



- Figuren til venstre viser:
- Figuren i midten viser:
- Figuren til højre viser:

Figuren i midten viser altså, at observationer knyttet til normalfordelte stokastiske variable fordeler sig sådan, at ca. 95% forventes at ligge inden for 2 spredninger af middelværdien. Det passer fint med det vi også husker fra binomialfordelingen om at udfald, der ligger inden for 2 spredninger af middelværdien kaldes normale udfald (dette bygger altså på teorien om normalfordelingen, som vi har fundet ud af kan bruges som en god tilnærmelse til binomialfordelingen, bare n er stor nok). Pludselig giver det også god mening, at udfald der ligger mere end 3 spredninger væk fra middelværdien kaldes exceptionelle (overbevis dig selv om dette ved at kigge på figuren yderst til højre).

Hvis vi nu forestiller os, at vi laver en stikprøveundersøgelse, hvor vi spørger n mennesker om de vil stemme på et bestemt parti eller ej, så kan vi altså forvente med ca. 95% sikkerhed at intervallet

$$[\mu - 2\sigma; \mu + 2\sigma]$$

vil indeholde den sande værdi for antallet af personer i stikprøven, der vil stemme på partiet.

Forklar, hvorfor vi også kan skrive dette interval som:

$$[n \cdot \hat{p} - 2 \cdot \sqrt{n \cdot \hat{p} \cdot (1 - \hat{p})}; n \cdot \hat{p} + 2 \cdot \sqrt{n \cdot \hat{p} \cdot (1 - \hat{p})}]$$

(vink: du har nok brug for at slå formler fra binomialfordelingen op i din formelsamling…)

Når vi laver meningsmålinger, er vi dog mere interesseret i procentandele end antal mennesker, der vil stemme på et bestemt parti. Derfor dividerer vi nu med stikprøvens størrelse for at få opgjort i procent i stedet:

$$\left[\frac{n \cdot \hat{p} - 2 \cdot \sqrt{n \cdot \hat{p} \cdot (1 - \hat{p})}}{n}; \frac{n \cdot \hat{p} + 2 \cdot \sqrt{n \cdot \hat{p} \cdot (1 - \hat{p})}}{n}\right]$$

Forklar hvad der sker rent matematisk i de næste reduktioner:

$$\left[\hat{p} - \frac{2 \cdot \sqrt{n \cdot \hat{p} \cdot (1 - \hat{p})}}{n}; \hat{p} + \frac{2 \cdot \sqrt{n \cdot \hat{p} \cdot (1 - \hat{p})}}{n}\right]$$

$$\left[\hat{p} - \frac{2 \cdot \sqrt{n \cdot \hat{p} \cdot (1 - \hat{p})}}{\sqrt{n^2}}; \hat{p} + \frac{2 \cdot \sqrt{n \cdot \hat{p} \cdot (1 - \hat{p})}}{\sqrt{n^2}}\right]$$

$$\left[\hat{p} - 2\sqrt{\frac{n \cdot \hat{p} \cdot (1-\hat{p})}{n^2}}; \hat{p} + 2\sqrt{\frac{n \cdot \hat{p} \cdot (1-\hat{p})}{n^2}}\right]$$

$$\left[\hat{p} - 2\sqrt{\frac{\hat{p} \cdot (1-\hat{p})}{n}}; \hat{p} + 2\sqrt{\frac{\hat{p} \cdot (1-\hat{p})}{n}}\right]$$

Konklusion: 95%-Konfidensintervallet for andelen i sådanne meningsmålinger kan altså beregnes ved:

$$\left[\hat{p} - 2\sqrt{\frac{\hat{p} \cdot (1-\hat{p})}{n}}; \hat{p} + 2\sqrt{\frac{\hat{p} \cdot (1-\hat{p})}{n}}\right]$$

Hvor p er den estimerede sandsynlighedsparameter (dvs. estimatet for partiets tilslutning ved et forestående valg) og n er antalsparameteren.

En ekstra overvejelse i forlængelse af beviset:

I sætningen om 95%-konfidensintervallet er der faktisk også en antagelse om, at n skal være større end 30, og $\hat{p}$ må hverken være meget stor eller lille. Kan du forklare det ud fra det vi har snakket om med normalfordelingen som approksimation til binomialfordelingen?

Aflevering om Holger

En 2g-elev ved navn Holger har valgt at hæve matematik fra B-niveau til A-niveau, men bliver nu pludselig meget nervøs for om han har styr på pensum om binomialfordelingen og binomialtest. Han var nemlig i Dubai, i hele den periode, det blev gennemgået virtuelt… Du skal hjælpe Holger med at få styr på pensum, så det ikke kun er hans brune hud, der shiner på A-niveauet!

Opgave: Alt er væk:

I nogle noter, som Holger har modtaget fra sine klassekammerater, står der mange megakryptiske begreber, som han ikke forstår meget af. Noget med binomialforsøg, antalsparameter, sandsynlighedsparameter!? Der er også nævnt noget med en opgave, hvor man skal kaste med en symmetrisk sekssidet terning 180 gange og så kigge efter antal 4'ere, men hans kammerat er åbenbart gået død, for der er ikke nogen forklaringer eller udregninger.

Prøv at hjælpe Holger ved at besvare følgende spørgsmål og løse opgaverne nedenunder (husk at gøre rigtig meget ud af at forklare ham vigtige begreber, og hvordan du løser opgaverne vha. formelsamlingen og/eller Excel-skabelonen eller GeoGebra. Han husker seriøst intet!):

a) Hvorfor er dette forsøg med at kaste en symmetrisk sekssidet terning 180 gange og så kigge på antal 4'ere et såkaldt binomialforsøg? Hvad forstår man ved antalsparameteren og sandsynlighedsparameteren i dette eksempel?

b) Bestem sandsynligheden for at få netop 37 4'ere.

- Fortæl Holger, hvilken formel man kan bruge, og hvordan man skulle sætte ind i den, hvis det var.
- Vis ham også, hvordan man let løser denne opgave vha. Excel eller GeoGebra

c) Bestem sandsynligheden for at få mindst 40 seksere.

d) Bestem sandsynligheden for at få højst 42 seksere.

e) Bestem det mest sandsynlige antal seksere (igen må du meget gerne fortælle ham, hvilken formel man også kan bruge til denne her opgave, hvis ens WordMat er crashet, for det sker jo!).

f) Bestem de antal seksere, der vil kunne betegnes som exceptionelle udfald i eksperimentet.

Opgave: Binomial-hvad?

Da klassen havde om binomialtest, var Holger så uheldig, at han var til tandlæge. Alle 5 gange… Så her har han også brug for hjælp!

Find opgaver frem, som vi har brugt i forløbet om binomialtest, og brug dem til at forklare Holger, hvad en binomialtest går ud på og hvilke typer test, man kan lave. Igen hav fokus på at forklare ham fremgangsmåden og begreberne så pædagogisk som muligt i takt med, at du bruger dem. Følgende begreber skal indgå i din forklaring til Holger:

- Population og stikprøve
- Nulhypotese
- Signifikansniveau
- Teststørrelse
- Testsandsynlighed
- Acceptmængde
- Kritisk værdi og mængde
- Testtyper: Dobbeltsidet test, enkeltsidet test (højresidet og venstresidet)

Opgave: Cracks i tallerkenen:[4]

Da klassen startede forløbet, var de alle stadig på skolen, så Holger fik selv taget nogle noter til delen om kombinatorik, fedt!!! Men han har kun mellemregningerne… Ingen forklaringer, suk…

Nedenunder ser du de opgaver, han har skrevet mellemregninger til. Prøv at tilføje forklarende tekst til hver udregning samt konklusioner. Hvad sker der, og hvad ender han med at have fundet ud af?

[4] Undervisningsminsteriet (Marts 2020) Vejledende Enkeltopgaver, Matematik stx B-niveau. Emu.dk https://emu.dk/sites/default/files/2020-03/Vejledendeopgaver%20stx%20B-niveau%202017%20reform%20-%20Marts%202020.pdf

A: I et køkkenskab står 15 tallerkener. På hvor mange måder kan man vælge 6 tallerkener ud af de 15, når man skal dække bordet til søndagsmiddag og bare vælger tilfældigt?

$$K(15,6) = \frac{15!}{6! \cdot (15-6)!} = 5005$$

B: Desværre har 3 af de 15 tallerkener revner. Hvad er sandsynligheden for at få 2 tallerkener med revner og 4 uden revner, når vi nu dækker bordet?

Formel til udregning af sandsynlighed: $\frac{antal\ gunstige}{antal\ mulige}$

$$K(3,2) = \frac{3!}{2! \cdot (3-2)!} = 3$$

$$K(12,4) = \frac{12!}{4! \cdot (12-4)!} = 495$$

$$3 \cdot 495 = 1485$$

$$K(15,6) = \frac{15!}{6! \cdot (15-6)!} = 5005$$

$$\frac{1485}{5005} \approx 0{,}2967033$$