MATERIALESAMLING

BÆREDYGTIGT BYGGERI
A- OG B-NIVEAU

INDHOLD

Materialet er udviklet af
Finn Grønne Kristensen, Silkeborg Gymnasium

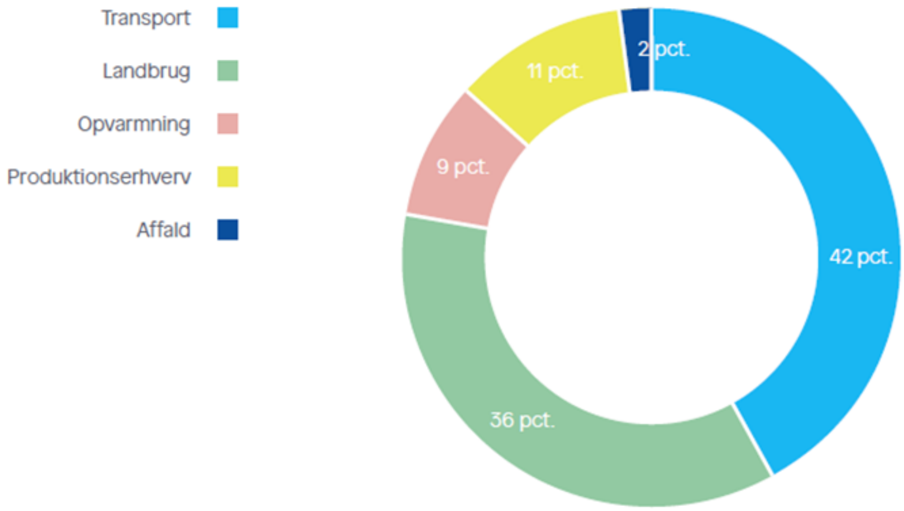
Emil Falkner Sørensen, Skanderborg Gymnasium

Foreningen af Rådgivende Ingeniører (FRI) og
DA Åben Virksomhed

Afsnit 1: Introlektion - arealer og voluminer

Introduktion

Klimaet og den globale opvarmning er blevet vigtige og ofte debatterede emner i de seneste år. Mange arbejder på at bidrage til at reducere den globale opvarmning. Et sted, hvor der kan opnås reduktion i udledningen af CO_2, er ved opvarmning og nedkøling af boliger. Klimarådet angiver, at ca. 9 pct. af klimagasserne stammer fra opvarmning.



Figur 1: Klimarådets illustration af, hvor klimagasserne stammer fra.

Der findes mange muligheder for at reducere varmeforbruget i boliger og dermed for at reducere udledningen af CO_2. Man kan f.eks. nævne isolering af boligen og brug af varmekilder, der udleder mindre CO_2.

Dette undervisningsforløb har fokus på et andet aspekt, som ligeledes har betydning for varmeforbruget i en bolig: Dimensionerne af boligen har også indvirkning på varmeforbruget. Størrelsen af boligen gør en forskel, og arealet af vægge og loft/tag bestemmer i høj grad, hvor stort varmetabet er til omgivelserne. Det vil vise sig, at der er forskel på, hvor stort arealet af vægge og lofter er i forhold til gulvarealet eller det indendørs rumfang af boligen.

Det er målet med forløbet ved hjælp af matematiske metoder at finde frem til, hvilke dimensioner på en bolig, der giver det mindste varmetab til omgivelserne.

Indledende overvejelser:

- Hvordan er boliger I det område, hvor I bor, dimensioneret? Er boligernes grundplan aflangt, rundt, kvadratisk…?
- Er der gode årsager til, at boliger ofte har bestemte dimensioner? Forsøg at finde frem til så mange årsager til det som muligt.
- Find eksempler på bygninger ude i verden, som ikke har de traditionelle dimensioner.
- Kom med bud på dimensioner, der muligvis vil være bedre, når vi vil lægge vægt på varmetabet fra boligen til omgivelserne.

Introopgave

Denne opgave kan fungere som appetitvækker til undervisningsforløbet. Her introduceres nogle af de metoder, der fører frem til optimale arealer af figurer.

- I skal arbejde sammen 2-3 elever i grupper om opgaven.
- I har følgende materialer til rådighed: Et ark karton i A3-format, en saks, en lineal og tape.
- I skal folde en bygning af karton, hvor I skal arbejde på at opnå et gulvareal, der er så stort som muligt. Bygning skal være lukket, hvilket vil sige, at der ikke må mangle en væg eller tag. Der skal ikke være gulv i bygningen, og den skal have fladt tag. Der skal være mindst 5 cm fra gulv til loft i bygningen. I må klippe så meget i A3-arket, som I vil. Bygningen skal kunne stå selv.
- Start opgaven med at finde idéer til udformning. I må gerne skitsere på papir, hvordan bygningen kunne se ud.
- Når I har konstrueret jeres bygning, skal I sammenligne den med de andre gruppers bygninger. Hvem har fundet frem til de dimensioner, der giver det største gulvareal i bygningen?

Arealer og voluminer

Målet med denne del er, at du skal opnå forståelse for, hvordan dimensionerne for geometriske figurer ændrer sig, når man ændrer på nogle variable i areal- og volumenformlerne. Samtidig får du grundlæggende færdigheder i GeoGebras 3D-værktøj.

Opgaver med GeoGebra:

Introduktion til GeoGebra

Start med at se, hvordan man let kan tegne 3D-figurer i GeoGebra i denne video.

1.1 Tegn disse figurer i GeoGebra: En kasse, en kugle, en cylinder, et prisme og en kegle. Du bestemmer selv dimensionerne. Find volumen for figurerne.

1.2 Tegn igen en kasse, men denne gang vil vi gerne variere længde og højden i kassen med en skyder.

Du kan finde en video, der viser, hvordan man gør her

1.3 Gå videre med kassen fra før, og find volumen og overfaldeareal af den.

Du kan finde en video, der viser, hvordan man gør her

1.4 Nu skal du tegne en kasse, hvor arealet af kassens bund holdes fast.

Du kan finde en video, der viser, hvordan man gør her

a) Bemærk, hvordan kassens gulvareal ændrer sig, når du flytter på skyderen.

b) Aflæs værdier for længde og overfladeareal for mindst 10 indstillinger af skyderen, og sæt tallene ind i et sildeben, hvor længderne er x-værdier og overfladearealerne er y-værdier.

c) Tegn punkterne ind i et koordinatsystem i GeoGebra. Hvad lægger du mærke til?

Afsnit 2: Differentialregning

Man kan finde arealer og voluminer for forskellige geometriske figurer ved hjælp af formler. Størrelser ude i virkeligheden kan omsættes til matematiske formler, som man kan arbejde videre med. Det smarte er så, at man kan bruge de resultater, som man finder frem til ved at arbejde med matematikken, til at få ny viden om virkeligheden.

Her er vi interesserede i at undersøge, hvordan man kan dimensionere en bygning, så varmetabet til omgivelserne bliver mindst muligt. Hvornår er arealet af vægge og loft i et hus mindst muligt med et bestemt gulvareal? Den type problem kaldes et **optimeringsproblem**, hvilket vil sige, at vi gerne vil finde den optimale værdi af f.eks. et areal. Læg mærke til, at en optimal værdi både kan være en størsteværdi og en mindsteværdi.

Vi skal derfor introducere en helt ny form for matematik, som kaldes differentialregning. Det smarte ved differentialregning er, at man kan finde **største- og mindsteværdier** for en funktion helt præcist. Man kan altså løse optimeringsproblemer med differentialregning.

Normalt vil man, når man går i gang med differentialregning, gå igennem en længere teoretisk bevisførelse, som leder frem til de formler, som skal bruges. Dette undervisningsforløb beskæftiger sig kun med formlerne, der er nødvendige for at undersøge problemet, og ikke den teoretiske baggrund for differentialregning.

Et vigtigt tal i differentialregning er **differentialkvotienten**. Hvis man har en funktion med et funktionsudtryk, kan man regne differentialkvotienter ud for funktionen for forskellige x-værdier. Det er ikke altid, at man kan finde sådan en differentialkvotient, men for de funktioner, vi ser på, kan man finde den for alle x'er med meget få undtagelser.

Lad os se på, hvordan man regner differentialkvotienter.

Vi ser på funktionen:

$$f(x) = x^2$$

Her kan man finde differentialkvotienten for et bestemt x_0 med denne formel:

$$f'(x_0) = 2 \cdot x_0$$

Læg mærke til, at man angiver, at det er en differentialkvotient til funktionen i x_0 ved at sætte en apostrof på. Vi siger det sådan "f mærke af x_0".

Eksempel

Find differentialkvotienten af $f(x)$, hvis $x_0 = 3$.

Vi sætter så blot $x_0 = 3$ i udtrykket herover:

$$f'(3) = 2 \cdot 3 = 6$$

Så differentialkvotienten af $f(x)$ er altså 6, når $x_0 = 3$.

På samme måde kan man finde differentialkvotienten af $f(x)$ for andre x_0.

Man kan også finde differentialkvotienter, hvis det er en anden potens end 2.

F.eks.:

$$f(x) = x^3$$

$$f'(x_0) = 3 \cdot x_0^2$$

Og:

$$f(x) = x^4$$

$$f'(x_0) = 4 \cdot x_0^3$$

Dette kan man generalisere til:

$$f(x) = x^n, \text{hvor } x > 0$$

$$f'(x_0) = n \cdot x_0^{n-1}$$

Eksempel

Lad os se på funktionen $f(x) = x^7$. Vi vil gerne finde differentialkvotienten når $x_0 = 2$. Vi bruger formlen herover. N må være 7 i dette tilfælde, så vi sætter 7 ind på n's plads i formlen:

$$f'(x_0) = 7 \cdot x_0^{7-1}$$

Dette reduceres til:

$$f'(x_0) = 7 \cdot x_0^6$$

Man kan nu sætte $x_0 = 2$ ind:

$$f'(2) = 7 \cdot 2^6 = 448$$

Opgave 2.1

Vælg selv andre potenser af n, og regn differentialkvotienten ud. Du må gerne vælge både positive og negative værdier for n. Prøv også at vælge værdier for n, som ikke er hele (f.eks. ½). Som du måske ved, gælder der at:

$$\sqrt{x} = x^{½}$$

og dermed kan vi altså med formlen herover beregne differentialkvotienter for kvadratrødder.

Sum og differens af to funktioner

Vi vil nu udvide antallet af funktioner, som vi kan finde differentialkvotienter for. Man kan let finde differentialkvotienter af funktioner, som er en sum af to andre funktioner:

$$h(x) = x^3 + x^2$$

Her ved vi allerede, hvordan man finder differentialkvotienter for de to potenser hver for sig. Man finder differentialkvotienter for $h(x)$ blot ved at lægge de to differentialkvotienter sammen:

$$h'(x_0) = 3 \cdot x_0^2 + 2 \cdot x_0$$

Hvis der står minus mellem de to funktioner, fungerer det på samme måde. Generelt ser det sådan ud:

$$h(x) = f(x) + g(x)$$

$$h'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$

og

$$h(x) = f(x) - g(x)$$

$$h'(x_0) = f'(x_0) - g'(x_0)$$

Opgave 2.2

Find differentialkvotienter for sum og differens af de funktioner, som du regnede på i opgave 2.1.

Funktion ganget med en konstant

Der vil ofte være en konstant ganget med den funktion, som man vil finde differentialkvotienter for. Også her er det let at finde differentialkvotienter:

Et par eksempler: $f(x) = 3 \cdot x^2$

$$f'(x_0) = 3 \cdot 2 \cdot x_0 = 6 \cdot x_0$$

og

$$f(x) = 4 \cdot x^{-2}$$

$$f'(x_0) = 4 \cdot (-2) \cdot x_0^{-3} = -8 \cdot x_0^{-3}$$

Generelt ser det sådan ud:

$$g(x) = k \cdot f(x)$$

$$g'(x_0) = k \cdot f'(x_0)$$

I daglig tale siger man nogle gange ”en konstant ganget på, lader vi stå”, når man finder differentialkvotient for en funktion, som er en konstant gange en anden funktion.

Husk hele tiden på, at man kan sætte et tal på x_0's plads og regne differentialkvotienten ud som et tal.

Så hvis man gerne vil regne differentialkvotienten ud for funktionen $f(x) = 4 \cdot x^{-2}$, når $x_0 = 2$ får man: $f'(2) = -8 \cdot 2^{-3} = -\frac{8}{2^3} = -1$

Bemærk, at hvis en funktion blot er en konstant (et tal):

$$f(x) = k$$

så vil differentialkvotienten for funktionen give nul, uanset hvilket *k* man vælger:

$$f'(x_0) = 0$$

Eksempel

Hvis $f(x) = 7$

Så vil $f'(x_0) = 0$, for alle x_0.

Differentialkvotienter for forskellige funktioner

Vi har nu tilstrækkelig med formler til at kunne finde differentialkvotienter for mange forskellige funktioner.

Vi vil først se på polynomier.

Lineære funktioner kan også opfattes som førstegradspolynomier:

$$f(x) = a \cdot x + b$$

$$f'(x_0) = a$$

Vi kan med et eksempel og brug af formlerne ovenfor se, at det ser ud til at være rigtigt, at:

$$f(x) = 3x - 5$$

Hvis vi vil finde differentialkvotienten her, kan vi se, at der er to funktioner $3x$ og 5, som er trukket fra hinanden. Vi ved, at vi så kan finde differentialkvotienten af de to udtryk og bagefter trække dem fra hinanden. Første udtryk kan man differentiere sådan (her er brugt en lidt anden måde at skrive differentialkvotienten op på):

$$(3 \cdot x_0)' = (3 \cdot x_0^1) = 3 \cdot 1 \cdot x_0^{1-1} = 3 \cdot x_0^0 = 3$$

Den anden del af funktionen er tallet 5, og det ved vi giver differentialkvotienten 0.

Alt i alt får vi, at $f'(x_0) = 3 + 0 = 3$

For andengradspolynomiet ser det sådan ud:

$$f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$$

$$f'(x_0) = 2 \cdot a \cdot x + b$$

Opgave 2.3
Check ved brug af formlerne, du har lært for differentialkvotienter, at formlen for differentialkvotienten for et andengradspolynomium er korrekt.

Opgave 2.4
Find differentialkvotienten for andengradspolynomiet:

$$f(x) = 2x^2 - 3x + 7$$

når $x_0 = 2$

Opgave 2.5
På samme måde som med andengradspolynomier kan man finde differentialkvotienter for alle mulige andre polynomier:

Find differentialkvotienten når $x_0 = 4$ for følgende polynomier:

$$f(x) = -2x^3 + 2x^2 - x - 1$$

$$g(x) = x^5 - x + 3$$

$$h(x) = x^4 + x^2 + 1$$

Du har måske tænkt på, at der er funktioner, som ikke er nævnt her. Det kunne være eksponentialfunktioner eller trigonometriske funktioner. De vil ikke blive gennemgået her, men man kan sagtens regne differentialkvotienter ud for de funktioner også.

Afsnit 3: Grafisk betydning af differentialkvotient

I Afsnit 2 gennemgik vi, hvordan man udregner differentialkvotienten for en funktion for et bestemt tal x_0.

Tallet har indtil videre ikke haft nogen betydning, så man kan måske undre sig over, hvad det kan bruges til.

Tallet kan bruges til at fortælle, om en funktion vokser eller aftager, og hvor hurtigt den vokser eller aftager. Så hvis differentialkvotienten er et positivt tal for et bestemt x_0, så ved vi, hvor hurtigt funktionen vokser for netop dette x_0. På samme måde fortæller differentialkvotienten, hvor hurtigt en funktion aftager, hvis tallet er negativt. Viden om, hvor en funktion vokser og aftager, kaldes for **monotoniforholdene** for funktionen.

Lad os se på et eksempel:

Eksempel

Vi ser på funktionen $f(x) = x^2 + 2$.

Man kan nemt beregne differentialkvotienten:

$$f'(x_0) = 2 \cdot x_0$$

Vi beregner så differentialkvotienten for nogle udvalgte tal:

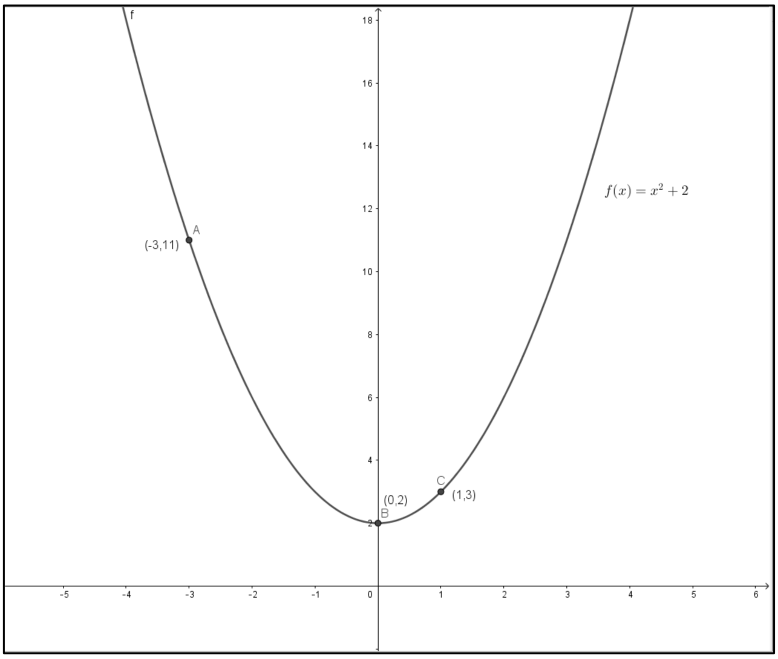
$$f'(1) = 2 \cdot 1 = 2$$

$$f'(-3) = 2 \cdot (-3) = -6$$

$$f'(0) = 2 \cdot 0 = 0$$

Her kan man se, at funktionen aftager hurtigere, når $x_0 = -3$, end den vokser, når $x_0 = 1$. Man kan se, at funktionen slet ikke vokser eller aftager, når x_0 er præcis *0*. Her er det vigtigt at forstå, at når x_0 er bare en smule på den ene eller den anden side af 0, så vil funktionen igen vokse eller aftage.

Se også grafen herunder.



Grafen for funktionen f(x). Tegnet i Geogebra

Så lad os lige opsummere:

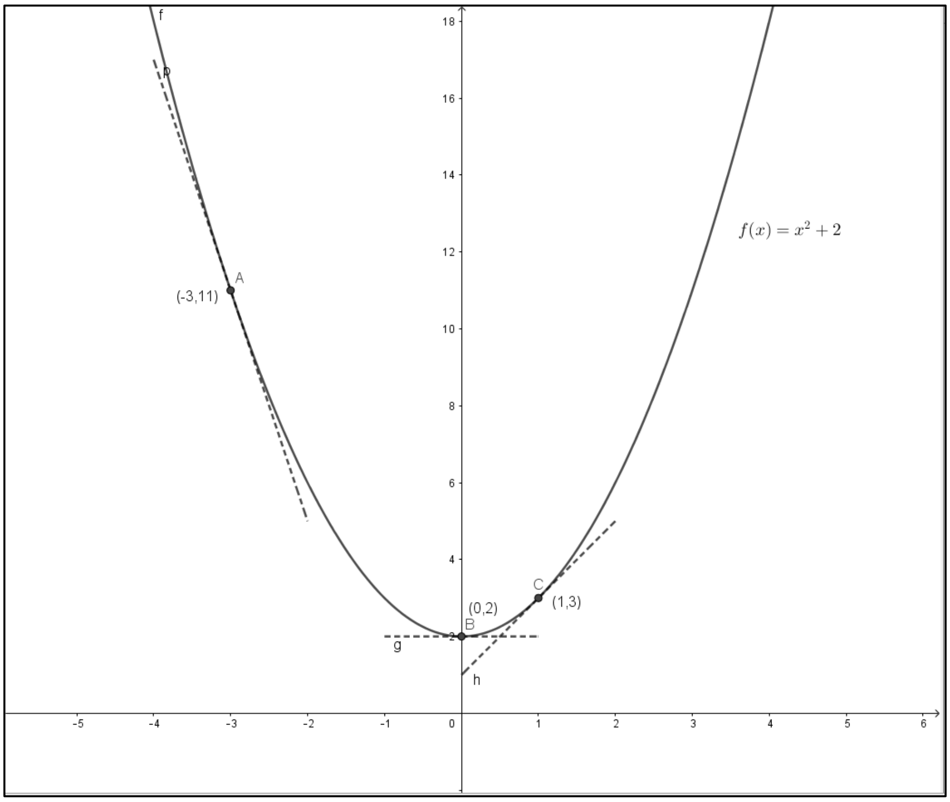
- Når differentialkvotienten er positiv, så er funktionen voksende.
- Når differentialkvotienten er negativ, så er funktionen aftagende.
- Når differentialkvotienten er 0 er funktionen konstant.

Som eksemplet herover viser, sker der et skift i forhold til, om funktionen er voksende eller aftagende ved $x_0 = 0$. Når x_0 er mindre end nul, er funktionen aftagende, og ligeledes er den voksende, når x_0 er større end nul. Vi siger, at der sker et skift i monotonien for funktionen for $x_0 = 0$.

Tangent

Vi vil nu undersøge differentialkvotient lidt mere detaljeret end beskrevet til nu. Hvis vi ser på differentialkvotienten for funktionen $f(x) = x^2 + 2$ når $x_0 = 1$, så vi før, at differentialkvotienten er 2, og at det betyder, at funktionen vokser for $x_0 = 1$.

For at forstå dette mere præcist indfører vi **tangenten** til funktionens graf på det sted, hvor $x_0 = 1$. Tangenten er en ret linje, der rører grafen i det punkt, der hvor $x_0 = 1$. Differentialkvotienten er hældningskoefficienten for denne tangent. På grafen herunder er grafen for $f(x) = x^2 + 2$ tegnet med tangenterne på de steder, hvor x_0 er lig -3, 0 eller 1.



Grafen for f(x): Tegnet i Geogebra

Man kan se, at tangenten, der går gennem punktet $(-3{,}11)$, har negativ hældningskoefficient. Vi regnede den ud til -6 tidligere. Det giver god mening, at hældningskoefficienten for tangenten er negativ, når grafen er aftagende. På samme måde er tangenten gennem punktet $(0{,}2)$ vandret med hældningskoefficient 0, og det stemmer med udregningen af $f'(x_0)$ før. I det tredje punkt $(1{,}3)$ er tangentens hældning positiv med hældningskoefficient 2, hvilket ser rimeligt ud, når man ser på grafen.

Opgave 3.1
Tegn grafen for funktionen $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$ i Geogebra.

a) Find differentialkvotienten for funktionen *f* for x_0-værdierne: -2, 0, 1, 2 og 3.

b) Tegn tangenter til grafen for de 5 værdier af x_0. Man tegner en tangent til en graf med denne GeoGebra formel: *Tangent (<x - værdi>,<funktion>).*

c) Beskriv, hvordan tangenterne ligger. Er funktionen voksende eller aftagende i punkterne?

Opgave 3.2
Når lydbølger forplanter sig gennem luften, afhænger deres hastighed, altså lydens hastighed, af luftens temperatur. Ved normalt tryk gælder sammenhængen:

$$f(t) = 331 \cdot \sqrt{\frac{t + 273}{273}}$$

Hvor t er temperaturen i °C og $f(t)$,er lydens hastighed (målt i m/s).

a) Tegn grafen i GeoGebra.

b) Find $f'(25)$ og giv en fortolkning af dette tal.

Opgave 3.3
En sten kastes lodret op i luften med udgangsfarten 10 m/s.

Dens højde over jorden $h(t)$ kan bestemmes ved funktionen:

$$h(t) = 10t - 5t^2$$

hvor t er tiden i sekunder, efter stenen er kastet.

a) Tegn grafen.
b) Hvor længe stiger stenen?
c) Hvor højt når stenen?
d) Hvornår rammer stenen jorden?
e) Find h'(1) og h'(4) og giv en fortolkning af tallene.

Afsnit 4: Monotoniforhold

Ordet **monotoni** dækker over en funktions tendens: Om den er voksende, aftagende eller konstant.

Når man skal bestemme en funktions monotoniforhold, skal man altså beskrive, hvor funktionen vokser og aftager på hele sin definitionsmængde.

Ordet **ekstrema** er en fællesbetegnelse for funktionens største og mindste værdier. Det er overskueligt at finde ekstrema, når monotoniforholdene er bestemt.

Vi husker, at når $f'(x)$ er positiv, betyder det, at $f(x)$ er voksende. Omvendt gælder det, at når $f'(x)$ er negativ, er $f(x)$ aftagende. Ydermere kan en funktion, hvis det ikke er en gaffelfunktion, **kun** skifte monotoni i punkter, hvor $f'(x) = 0$.

Monotoniintervaller

De sammenhængende intervaller, hvor funktionen ikke skifter monotoni, kalder vi for **monotoniintervaller**. Rent praktisk opskrives disse ved at finde løsningerne til $f'(x) = 0$ og bruge dem til at opdele definitionsmængden. Forestil dig, at definitionsmængden for funktionen er en agurk, og løsningerne til $f'(x) = 0$ markerer der, hvor man skal skære. De overskårne agurkestykker er da monotoniintervallerne.

Eksempel

Opskriv monotoniintervallerne for $f(x) = x^2 - 6x + 10$, hvor $0 \leq x \leq 5$, altså når det oplyses, at definitionsmængden er $Dm(f)$=[0;5].

Først skal man finde alle de steder, hvor funktionen skifter monotoni. Da det kun kan ske, når $f'(x) = 0$, er man nødt til at løse denne ligning.

Allerførst skal man dog finde $f'(x)$.

Vi differentierer: $$f'(x) = 2x - 6$$

Vi løser ligningen:
$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ 2x - 6 &= 0 \\ 2x &= 6 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

Vi ser, at det eneste sted, hvor funktionen kan skifte monotoni, er i $x = 3$.

Definitionsmængden for f er [0;5], og denne bliver altså ”skåret over” ved $x = 3$.

Altså har funktionen monotoniintervallerne:
[0;3]
[3;5]

Monotoniforhold

Når monotoniintervaller er bestemt, er der ikke langt til at bestemme **monotoniforholdene**.

En funktions monotoniforhold opskrives ligesom monotoniintervallerne, men med tilføjelse af funktionens monotoni. Funktionens monotoni kan enten bestemmes ved hjælp af. fortegnet for f' eller ved helt lavpraktisk at lave et plot af funktionen og kigge.

Eksempel

Opskriv monotoniforholdene for $f(x) = x^2 - 6x + 10$, hvor $0 \leq x \leq 5$, altså når det oplyses, at definitionsmængden er $Dm(f)$=[0;5].

Vi har allerede monotoniintervallerne:

[0;3]

[3;5]

Vi bestemmer nu monotonien for f ved at beregne $f'(x)$ i en x-værdi fra begge intervaller. Vi kan selv vælge hvilken, idet f jo har den samme monotoni på hele intervallet.

Fra det første interval kan vi f.eks. vælge x-værdien 1 og derfor beregne $f'(1)$:

$$f'(1) = 2 \cdot 1 - 6 = 2 - 6 = -4$$

Vi ser, at $f'(1)$ er negativ, og derfor er f aftagende på hele intervallet [0;3].
På samme måde vælger vi nu en x-værdi fra det andet interval, f.eks. 4:

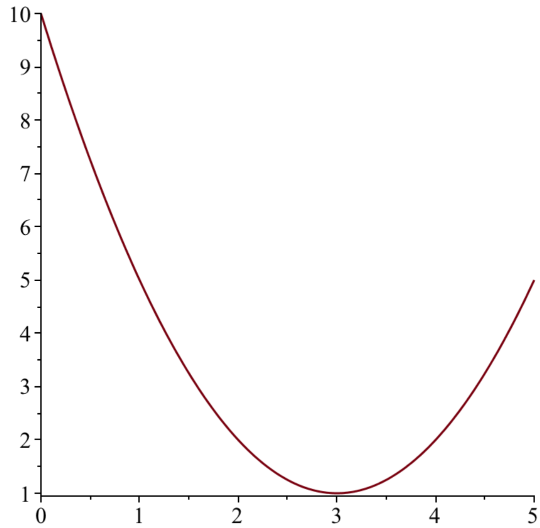
$$f'(4) = 2 \cdot 4 - 6 = 8 - 6 = 2$$

Vi ser, at $f'(4)$ er positiv, og derfor er f voksende på hele intervallet [3,5].
Alt i alt kan monotoniforholdene opskrives som:

f er aftagende på intervallet [0;3]

f er voksende på intervallet [3;5]

Man kunne også have aflæst funktionens monotoni ved at betragte et plot af f:



Figur 2. Kilde: Tegnet i Maple 2019

Monotonilinje og ekstrema

Ud fra monotoniforholdene kan man lave en **monotonilinje**, der er et skema, der overskueliggør en funktionens monotoni og giver overblik over **ekstremumspunkter**. En fortegnslinje skal illustrere de x-værdier, der begrænser funktionens definitionsmængde og inddeler monotoniintervallerne, og fortegnene for $f'(x)$ på monotoniintervallerne samt monotonien for $f(x)$.

De punkter, hvor funktionen skifter monotoni, er de punkter, hvor funktionen antager enten et **lokalt minimum** eller et **lokalt maksimum**.

Om det er minimum eller et maksimum, afgør typen af monotoniskiftet:

-Hvis funktionen går fra at være voksende til at være aftagende, er der tale om et **lokalt maksimum**.

-Hvis funktionen går fra at være aftagende til at være voksende, er der tale om et **lokalt minimum**.

Hvis definitionsmængden er et lukket og begrænset interval, beregnes også funktionsværdierne af endepunkterne.

-Funktionens **minimum** bestemmes da som den **mindste** af de lokale minima og funktionsværdien af endepunkterne.

-Funktionens **maksimum** bestemmes som den **største** af de lokale maksima og funktionsværdien af endepunkterne.

Eksempel

Man kan lave en monotonilinje for funktionen f fra de tidligere eksempler:

x	0		3		5
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	$f(0) = 10$	Aftagende	Lokalt minimum $f(3) = 1$	Voksende	$f(5) = 5$

Man ser, at da funktionen går fra at være aftagende til at være voksende i x=3, er dette et minimumssted, og funktionen har her værdien

$$f(3) = 3^2 - 6 \cdot 3 + 10 = 1.$$

Definitionsmængden [0;5] er et lukket og begrænset interval, så vi beregner også funktionsværdierne af endepunkterne. Dem får vi til:

$$f(0) = 0^2 - 6 \cdot 0 + 10 = 10$$
$$f(5) = 5^2 - 6 \cdot 5 + 10 = 5$$

Vi har altså 3 værdier, hvor den største er 10, og den mindste er 1.
Altså har funktionen f minimumspunkt i (3,1) og maksimumspunkt i (0,10).

Ruteplan til monotoniforhold og ekstrema

Man kan bruge følgende ruteplan til at finde monotoniforhold og ekstrema for en funktion:

1. Find funktionens afledede.

2. Løs ligningen $f'(x) = 0$, og brug løsningen til at inddele funktionens definitionsmængde i monotoniintervaller.

3. Beregn $f'(x)$ i et enkelt punkt fra hvert monotoniinterval, og aflæs fortegnet.

4. Udnyt, at fortegnet for f' kan oversættes til monotoni for f.

Punkt 3 og 4 kan, hvis der er mulighed for at lave plot, udskiftes med:

Lav et plot af funktionen og iagttag, om funktionen er voksende eller aftagende på monotoniintervallerne.

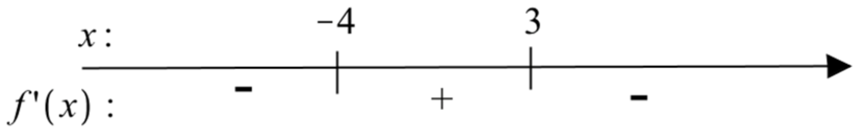
5. Opskriv funktionens monotoniforhold.

6. Lav en monotonilinje og identificer eventuelle lokale ekstremumsteder.

7. Maksimum findes som den største værdi blandt de lokale maksima, og minimum findes som den mindste af de lokale minima. Hvis definitionsmængden er et lukket begrænset interval, skal funktionsværdierne af endepunkterne også tages i betragtning.

Opgave 4.1
Det oplyses om en funktion f, at $f(-4) = -10$ og $f(3) = 100$.

Angiv monotoniforhold, og karakteriser lokale ekstrema for f ud fra nedenstående oplysninger om f'.



Figur 3. Kilde: Tegnet i Maple 2019

Opgave 4.2
En funktion f er givet ved $f(x) = x^4 - 2x^2 + 4$, hvor $-2 \leq x \leq 2$.

a) Løs $f'(x) = 0$.

b) Bestem monotoniforholdene for f.

c) Bestem lokale ekstrema for f.

Opgave 4.3
Et byggefirma skal designe en kornsilo, der kan rumme 200 m^3 korn, og er i den forbindelse interesseret i, hvordan overfladearealet afhænger af kornsiloens radius. En analytiker finder frem til sammenhængen $OA(r) = \frac{400}{r} + r^2 \cdot \pi$, hvor $1 \leq r \leq 10$.

Opskriv monotoniforholdene for siloens overfladeareal.

Opgave 4.4

Et firma specialiserer sig i at producere færdiglavede legehuse. Legehusene har form som et kugleafsnit med en 2 m^2 stor indgang og skal have et rumfang på 5 m^3.

Overfladearealet af et af legehusene kan skrives som funktion af dets højde:

$$OA(h) = \frac{20}{h} + \frac{h^2 \cdot \pi}{3} - 2, \text{ hvor } 1 \leq h \leq 3.$$

Opskriv monotoniforholdene for overfladearealet.

Opgave 4.5

En funktion f er givet ved $f(x) = 4 \cdot \sqrt{x} - \frac{1}{2}x^2$, hvor $x \geq 0$.

Bestem monotoniforholdene for $f(x)$.

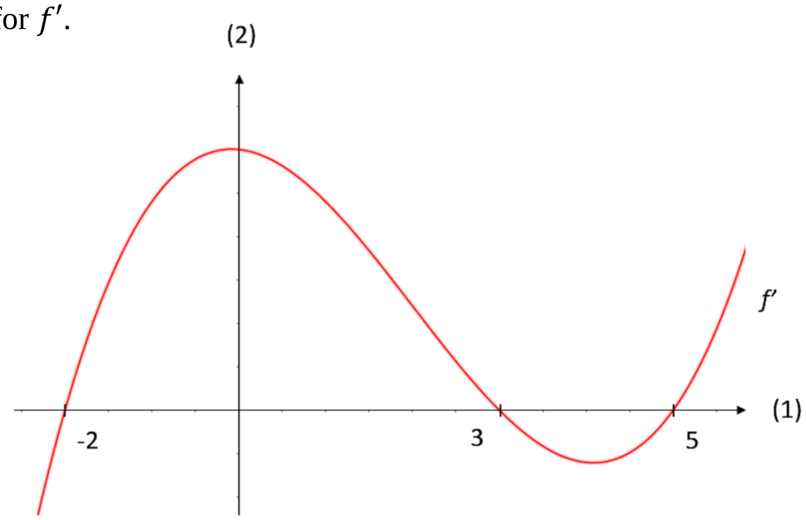
Opgave 4.6

En funktion f er givet ved $f(x) = 8x^{-1} + \frac{1}{2}x - 3$, hvor $2 \leq x \leq 10$.

Løs ligningen $f'(x) = 0$ og bestem monotoniforholdene for f.

Opgave 4.7

Denne opgave handler om en funktion f, men den eneste information, som vi har, er et billede af grafen for f'.



Figur 4. Kilde: Tegnet i Paint.

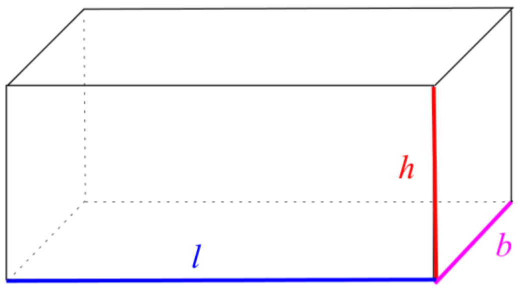
Brug grafen for f' til at bestemme monotoniforholdene for f i **intervallet** [-3;6].

Afsnit 5: Opstilling af funktionsudtryk

Målet er at udtrykke **overfladearealet** af en given figur ved kun én variabel. Dette bliver generelt besværligt, da de fleste kendte figurer, afhænger af flere variable. F.eks. afhænger en kasses overfladeareal af både dens længde højde og bredde.

Eksempel

Opskriv rumfanget og overfladeareal for en kasse.



Figur 5. Kilde: Tegnet i Maple 2019

$$V = højde \cdot længde \cdot bredde$$

$$= h \cdot l \cdot b$$

$$\begin{aligned} OA &= A_{top} + A_{front} + A_{venstre} + A_{bund} + A_{bag} + A_{højre} \\ &= 2 \cdot \left(A_{top} + A_{front} + A_{venstre}\right) \\ &= 2(længde \cdot bredde + bredde \cdot højde + længde \cdot højde) \\ &= 2 \cdot (l \cdot b + b \cdot h + l \cdot h) \\ &= 2lb + 2bh + 2lh \end{aligned}$$

Bibetingelse

Vi har i de fleste tilfælde brug for oplysninger, der begrænser opgaven. En sådan oplysning kaldes en **bibetingelse**. Det kan f.eks. være, at kassen skal have en fast højde, at længden skal være det samme som bredden eller noget helt andet. Bibetingelsen kan ofte udtrykkes som en ligning, hvor størrelserne i opgaven indgår.

Eksempel
En kasse har samme længde, som den har bredde. Bredden skal betegnes *x*. Kassens volumen skal være 5 m^3. Opskriv bibetingelserne.

Der er to bibetingelser her.

Den første udtaler sig om, at bredden og længden kan skrives som den samme værdi *x*:

$$b = l = x$$

Den anden udtaler sig om rumfanget:

$$V = 5$$

Vi kan kombinere bibetingelserne:

$$\begin{aligned} V &= l \cdot b \cdot h \\ 5 &= l \cdot b \cdot h \\ 5 &= x \cdot x \cdot h \\ 5 &= x^2 h \end{aligned}$$

Hvad skal man så bruge det til? Jo, når der er flere udtryk, der indeholder variable fra opgaven, kan man isolere én af variablerne i bibetingelsen og således udtrykke den ønskede variabel ved de andre.

Eksempel
Udtryk *h* ved *x* i bibetingelsen fra eksemplet ovenfor:

Vi har:

$$5 = x^2 h$$

Isoleres h, får vi:

$$h = \frac{5}{x^2}$$

Dette er et vigtigt trin i mange optimeringsopgaver og er godt at kunne.

Elimination af variable

Når man har udtrykt én variabel ved de andre, kan dette indsættes i det oprindelige udtryk for den funktion, man gerne vil opstille (f.eks. overfladearealet). På den måde har man fjernet en variabel fra udtrykket. Man siger, at en variabel er blevet **elimineret**.

Eksempel

Eliminer l,h og b ved at bruge bibetingelserne fra tidligere eksempler, og opskriv overfladearealet for kassen, så det kun afhænger af x.

Vi husker, at overfladearealet af kassen kunne skrives som:

$$OA = 2lb + 2bh + 2lh$$

En af bibetingelserne siger, at vi må bytte l og b ud med x:

$$\begin{aligned} OA &= 2x \cdot x + 2x \cdot h + 2x \cdot h \\ &= 2x^2 + 4xh \end{aligned}$$

Vi har nu elimineret l og b og har x og h tilbage.

Den anden bibetingelse gav os, at vi kunne udtrykke h ved x:

$$h = \frac{5}{x^2}$$

Vi indsætter nu dette udtryk for h i udtrykket for overfladearelet af kassen:

$$\begin{aligned} OA &= 2x^2 + 4x \cdot \frac{5}{x^2} \\ &= 2x^2 + 4 \cdot \frac{5}{x} \\ &= 2x^2 + \frac{20}{x} \end{aligned}$$

Vi har nu et udtryk for overfladearealet, der kun afhænger af x. Variablen h er altså blevet elimineret fra udtrykket for overfladearealet.

Ruteplan til opstilling af funktionsudtryk

Generelt kan man følge denne ruteplan:

1. Få et overblik over, hvilke variable der indgår. En skitse af situationen er ofte en virkelig god ide!

2.Udtryk den størrelse, som du ønsker at opskrive et funktionsudtryk for, ved brug af variablerne fra skitsen.

3.Opskriv bibetingelsen (der kan være flere).

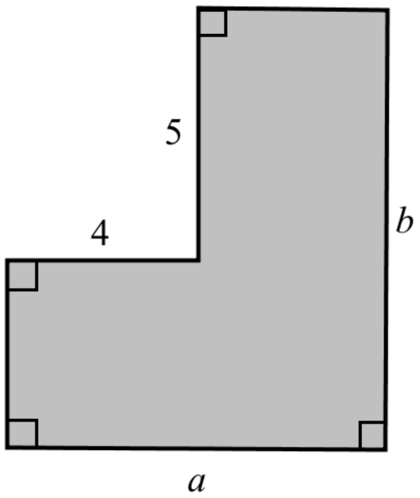
4.Benyt bibetingelsen til at eliminere alle variable på nær én.

5. Udtryk den størrelse, som du ønsker at arbejde med ved den sidste variabel.

6. Dermed har man et funktionsudtryk!

Opgave 5.1

Figuren viser en skitse af et område, som har en omkreds på 50.



Figur 6. Kilde: Tegnet i Maple 2019

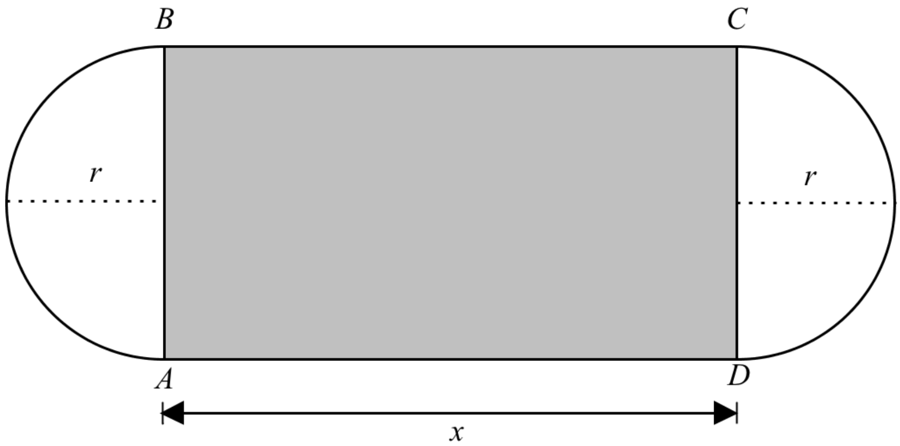
a) Opskriv et udtryk for omkredsen, der både afhænger af a og b.

b) Brug bibetingelsen til at udtrykke b ved a.

c) Bestem arealet af området som funktion af a.

Opgave 5.2

En løbebanes form er dannet af to lige lange parallelle linjestykker (på figuren AD og BC), der i begge ender er forbundet med halvcirkler.



Figur 7. Kilde: Tegnet i Maple 2019

a) Bestem omkredsen af løbebanen udtrykt ved x og r.
   Omkredsen af løbebanen skal være 800 m
b) Identificer og opskriv konkret, hvad bibetingelsen er.
c) Udtryk arealet af rektanglet $ABCD$ udtrykt ved $x$og r.
d) Brug bibetingelsen til at udtrykke arealet af rektanglet $ABCD$ ved x.

Opgave 5.3

En kasse uden låg skal kunne rumme 125 dm^3. Kassens bredde er x, og kassens længde er $2x$ (begge målt i dm). Kassens højde betegnes med h.

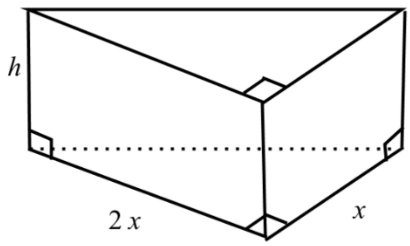
a) Opskriv bibetingelsen.

b) Bestem kassens højde h udtrykt ved x.

c) Bestem kassens overfladeareal udtrykt ved x.

Opgave 5.4

En bestemt type af lukkede beholdere har form som et retvinklet prisme, hvor grundfladen er en ligebenet retvinklet trekant. Endvidere er rumfanget af en sådan beholder 100.



Figur 8. Kilde: Tegnet i Maple 2019

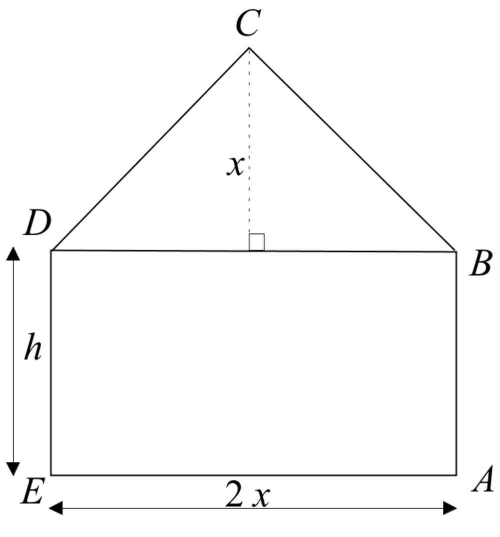
a) Opskriv overfladearealet og rumfanget udtrykt ved x og h.

b) Udtryk h ved x.

c) Angiv overfladearealet af en sådan beholder som funktion af kateternes længde x.

Opgave 5.5

En husgavl har form som set på figuren nedenfor:



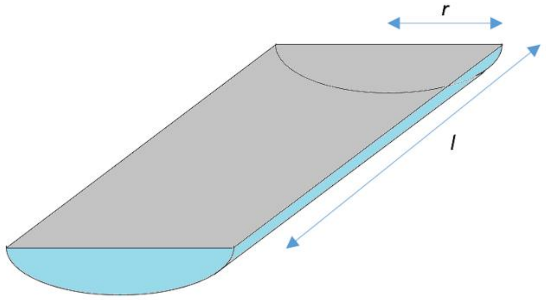
Figur 9. Kilde: Tegnet i Maple 2019

a) Bestem arealet af gavlen udtrykt ved x og h.

b) Bestem omkredsen af gavlen som funktion af x, når arealet af gavlen skal være 12 m^2.

Opgave 5.6

En virksomhed, der producerer havegrill, arbejder på en model, der har form som en halvcylinder:



Figur 10. Kilde: Tegnet i paint

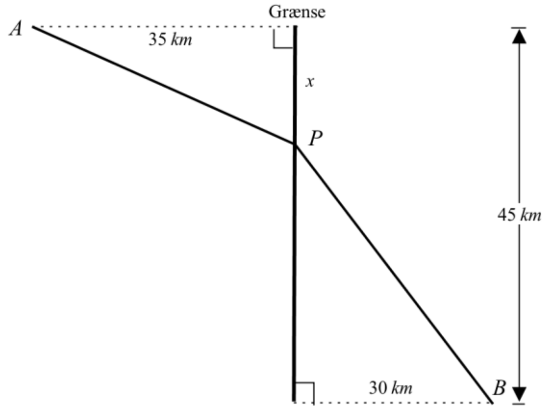
For at minimere omkostningerne er firmaet interesseret i at finde ud af, hvordan overfladearealet hænger sammen med radius r og længden l.

a) Opskriv et udtryk for grillens overfladeareal, der afhænger af r og l.

b) Opskriv et udtryk for grillens overfladeareal, der kun afhænger af r, når grillens rumfang skal være 6 dm^3.

Opgave 5.7

Mellem to punkter A og B i to forskellige lande skal der etableres en vej APB, som vist på figuren herunder.



Figur 11. Kilde: Tegnet i Maple 2019

Prisen for stykket AP er 50 mio. kr. pr. km, og prisen for stykket PB er 60 mio. kr. pr. km.

a) Bestem $|AP|$ og $|PB|$ udtrykt ved x, idet $0 \leq x \leq 45$.

b) Bestem prisen for vejen udtrykt ved x.

Afsnit 6: Optimering

Når en given situation giver anledning til et funktionsudtryk for en størrelse, der ønskes maksimeret eller minimeret inden for de givne rammer, kaldes det **optimering**, når man finder maksimum eller minimum.

Vi har i de foregående afsnit arbejdet med:

-At finde monotoniforhold og ekstrema for en funktion.

-At opskrive funktionsudtryk for udvalgte størrelser.

Kombineres disse to discipliner, har vi altså stort set udført det, som vi kalder optimering.

Eksempel

En kasse har højde h og samme længde som bredde, der betegnes med x. Find det mindste overfladeareal, når kassens volumen skal være 10 m^3.

Vi opskriver kassens volumen og overfladeareal. Vi springer et par mellemregninger over, da vi allerede har lavet disse i et tidligere afsnit.

$$V = x^2h$$

$$OA = 4xh + x^2$$

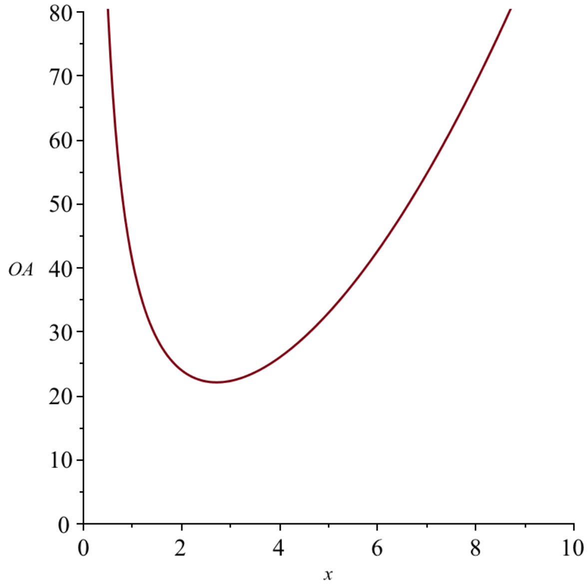
Bibetingelsen i denne opgave er $V = 10\ m^3$, som vi bruger til at eliminere variablen h.

$$10 = x^2h$$
$$h = \frac{10}{x^2}$$

Vi indsætter udtrykket for h i udtrykket for OA for at eliminere h.

$$OA = 4xh + x^2$$
$$OA = 4x \cdot \frac{10}{x^2} + x^2$$
$$OA = \frac{40}{x} + x^2$$

Vi har nu en funktion for overfladearealet: $OA(x) = \frac{40}{x} + x^2$.
Vi laver et plot af overfladearealet, så vi kan se, om det har et minimum:



Figur 12. Kilde: Tegnet i Maple 2019

Det viser, at overfladearealet har et minimum, og at det ligger omkring $x = 2.5$.

For at finde den præcise x-værdi, hvor det mindste overfladeareal opnås, er vi nødt til at løse ligningen $OA'(x) = 0$, hvilket kan klares CAS, men som vi for eksemplets skyld klarer uden hjælpemidler.

Vi differentierer først $OA'(x)$:

$$OA'(x) = -\frac{40}{x^2} + 2x$$

Vi løser nu ligningen:

$$OA'(x) = 0$$

$$-\frac{40}{x^2} + 2x = 0$$

$$2x = \frac{40}{x^2}$$
$$2x^3 = 40$$
$$x = \sqrt[3]{20} \approx 2.71\ m$$

Vi ser, at dette stemmer nogenlunde fint overens med vores gæt fra grafen ovenfor.

Det tilsvarende overfladeareal findes ved at indsætte den fundne x-værdi i vores funktion for overfladearealet:

$$OA_{min} \approx OA(2.71) = \frac{40}{2.71} + 2.71^2 = 22.1\ m^2$$

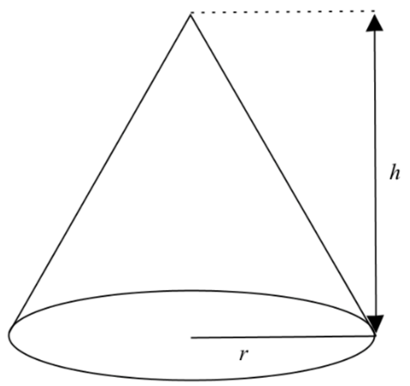
Altså er kassens mindste overfladeareal 22.1 m^2

Eksempel

På en folkeskole er der emneuge, og til dette skal der bl.a. bruges en tipi (et kegleformet indianertelt), hvori børnene skal lave indianersmykker.

Der skal være plads til 10 arbejdende børn, og tipiens **volumen** skal derfor ifølge arbejdstilsynet være på **120 m^3**. Derudover må radius af tipien ikke være mindre end 2 m og ikke større end 7 m. Tipiens sider skal laves af lærredsstof, og man kan se bort fra bunden. Da skolen skal spare, vil de gerne bygge tipien ved at bruge så lidt stof som muligt. Hvor mange m^2 stof skal der mindst bruges?

Vi har her at gøre med en kegleform, hvor både volumen og overfladearealet er relevant.



Figur 13. Kilde: Tegnet i Maple 2019

Formlerne for disse er: $V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$

$$OA = \pi \cdot r \cdot \sqrt{r^2 + h^2}$$

Bemærk, at overfladearealet OA afhænger af både r og h. For at vi kan finde monotoniforhold og ekstrema for overfladearealet, må det kun afhænge af én variabel.

Altså skal enten r eller h elimineres, og til dette skal vi bruge en bibetingelse. Vi ser i opgaveteksten, at rumfanget af tipien skal være 120 m^3. Dette kan skrives som

$$V = 120$$
$$\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h = 120$$

I dette udtryk, kan vi isolere h:

$$\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h = 120$$

$$r^2 \cdot h = 3 \cdot \frac{120}{\pi}$$

$$h = 3 \cdot \frac{120}{\pi \cdot r^2}$$

$$h = \frac{360}{\pi \cdot r^2}$$

Dette kan indsættes i udtrykket for overfladearealet:

$$OA = \pi \cdot r \cdot \sqrt{r^2 + h^2}$$

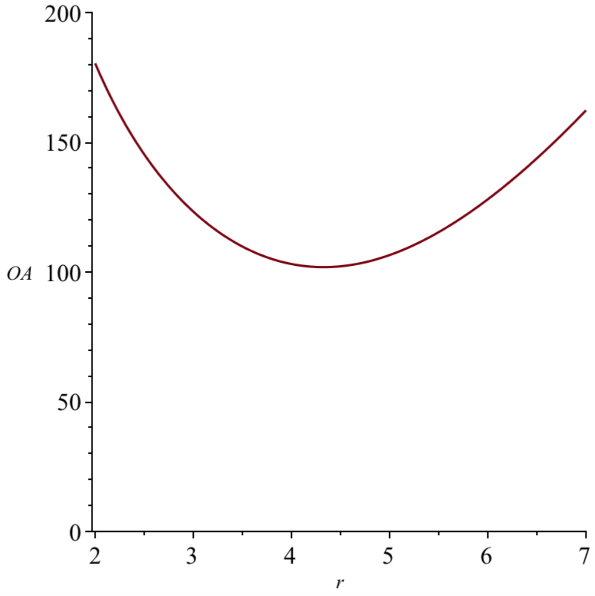
$$OA = \pi \cdot r \cdot \sqrt{r^2 + \left(\frac{360}{\pi \cdot r^2}\right)^2}$$

Selv om udtrykket her ser lidt farligt ud, afhænger det i det mindste kun af én variabel r.

Vi har altså nu opstillet et funktionsudtryk for overfladearealet, som vi kan arbejde med.

I opgaveteksten ser vi, at $2 \leq r \leq 7$, så vi har en definitionsmængde for overfladearealet på [2;7].

Vi laver et plot af overfladearealet, så vi kan se, om det har et minimum. Vi husker at benytte definitionsmængden som begrænsning:



Figur 14. Kilde: Tegnet i Maple 2019

Vi ser tydelig af plottet, at overfladearealet har et minimum, og at det indfinder sig, når radius er omkring 4.2 m.

For at finde den præcise radius, hvor det mindste overfladeareal opnås, er vi nødt til at løse ligningen $OA'(r) = 0$, hvilket klares nemmest med CAS på nuværende tidspunkt.

Der gælder:

$$OA'(r) = 0$$

$$r \overset{CAS}{=} \sqrt[6]{\frac{360^2}{2 \cdot \pi^2}} \approx 4.33\ m$$

Dette stemmer nogenlunde fint overens med, hvad vi ser på grafen.

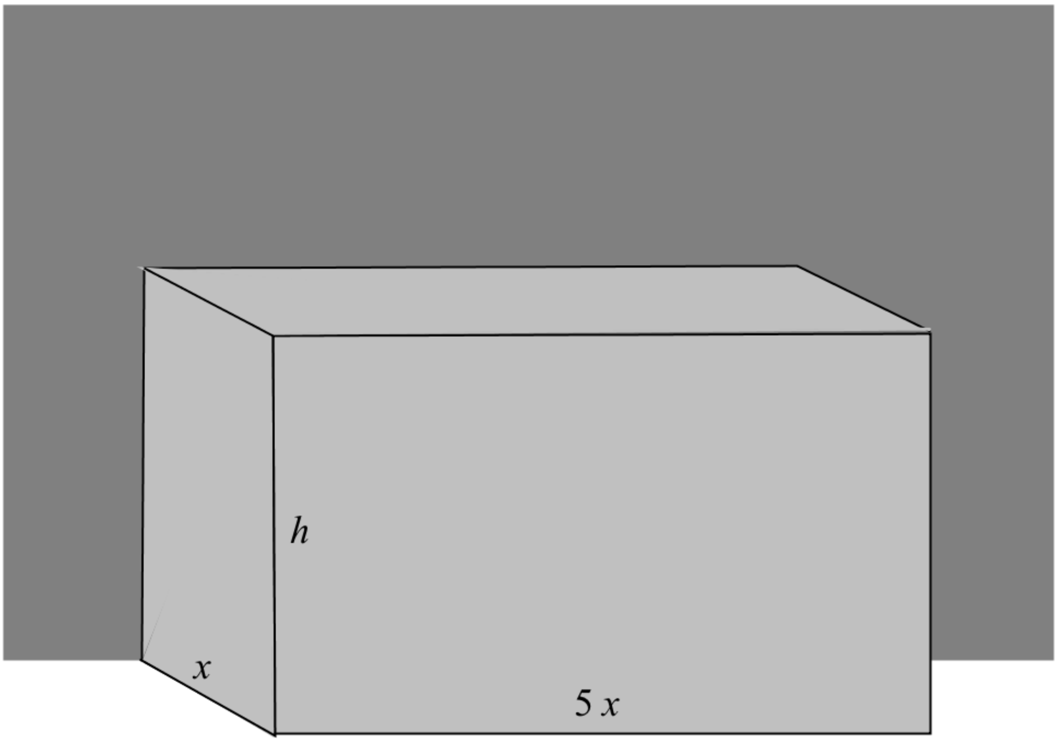
Det tilsvarende overfladeareal findes ved at indsætte den fundne radius i funktionen for overfladearealet:

$$OA_{min} \approx OA(4.33) = \pi \cdot 4.33 \cdot \sqrt{4.33^2 + \left(\frac{360}{\pi \cdot 4.33^2}\right)^2} = 101.89\ m^2$$

Altså skal der mindst benyttes 101.89 m^2 lærred til at bygge tipien.

Opgave 6.1

Et kasseformet fuglebur skal bygges langs en mur, så at en del af muren udgør den ene side, og jorden udgør bunden af buret. Den del af buret, der skal indhegnes med trådnet, består således af loftet og de tre andre sider. Buret skal være 6 gange så langt, som det er bredt. Bredden betegnes med x, og højden betegnes med h.



Figur 15. Tegnet i Maple 2019

a) Gør rede for, at fugleburets overfladeareal OA og rumfang V kan udtrykkes ved x og h, så at:

$$OA = 6 \cdot x^2 + 8 \cdot h \cdot x$$

$$V = 6 \cdot x^2 \cdot h$$

Det oplyses, at overfladearealet er 70 m^2.

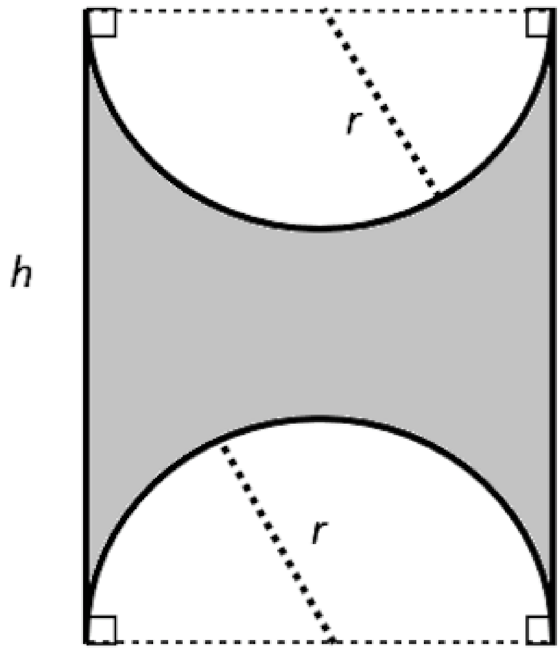
b) Bestem rumfanget V udtrykt ved x, og bestem det størst mulige rumfang, når $0 < x < 3$.

Opgave 6.2

Et stykke metal har form som et rektangel med sidelængderne h og $2r$.

2 halvcirkler med radius r skæres ud af metalstykket, som vist på figuren herunder.

Det tilbageværende metalstykke har omkredsen 8.



Figur 16. Kilde: Tegnet i Maple 2019.

a) Bestem h udtrykt ved r.

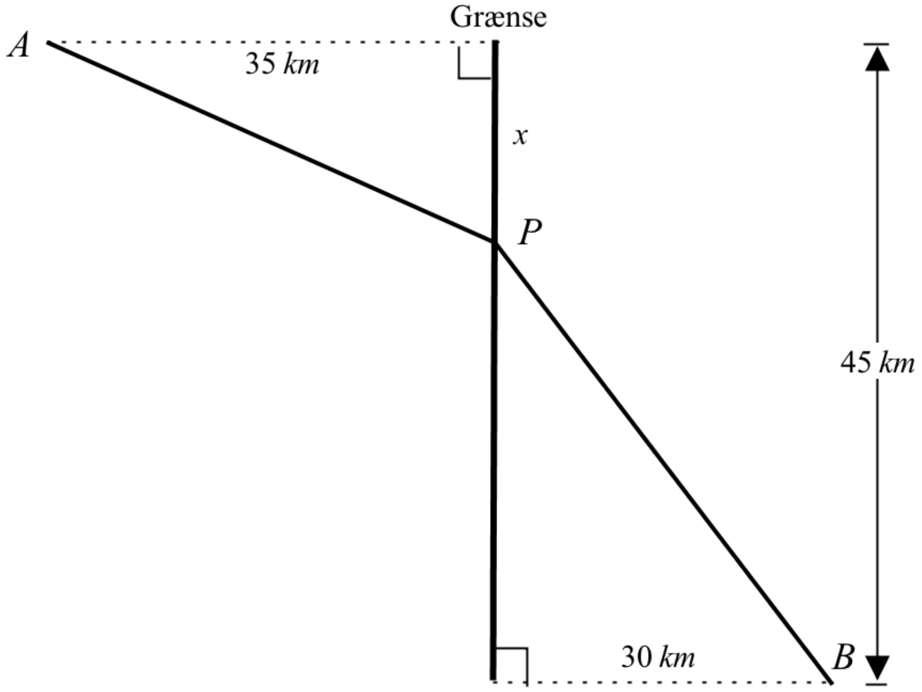
b) Gør rede for, at arealet af det tilbageværende metalstykke som funktion af r kan skrives ved:

$$A(r) = 8 \cdot r - 3 \cdot \pi \cdot r^2$$

c) Bestem r, så metalstykket bliver størst muligt, og find det største areal.

Opgave 6.3

Mellem to punkter A og B i to forskellige lande skal der etableres en vej APB, som vist på figuren herunder.



Figur 17. Kilde: Tegnet i Maple 2019

Prisen for stykket AP er 50 mio. kr. pr. km, og prisen for stykket PB er 60 mio. kr. pr. km.

a) Bestem $|AP|$ og $|PB|$ udtrykt ved x, idet $0 \leq x \leq 45$.

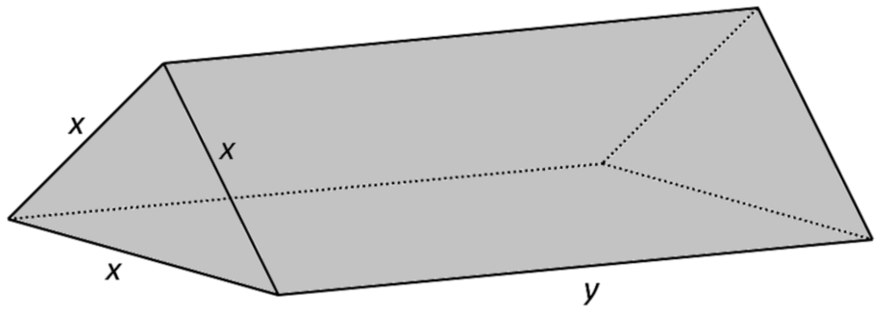
b) Bestem prisen for vejen udtrykt ved x.

c) Bestem den værdi af x,der gør vejen APB billigst.

d) Bestem prisen for den billigste vejstrækning APB.

Opgave 6.4

En særlig type festtelt, der kan lukkes i begge ender og har samme gulvtype som loftet, har form som vist på figuren herunder. Teltets endeflader har form som ligesidede trekanter med siden x, hvor $1 \leq x \leq 15$. Teltets længde er y.



Figur 18. Kilde: Tegnet i Paint.

a) Bestem teltets rumfang, når $x = 3m$ og $y = 6m$. Det oplyses, at en bestemt type af sådanne beholdere har et rumfang på 100 m^3. Ydermere oplyses det, at overfladearealet OA af denne beholder som funktion af x er givet ved:

$$OA(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}x^2 + 400 \cdot \frac{\sqrt{3}}{x}$$

b) Bestem x, så beholderens overfladeareal er mindst mulig.

c) Bestem det mindst mulige overfladeareal OA_{min} for beholderen.

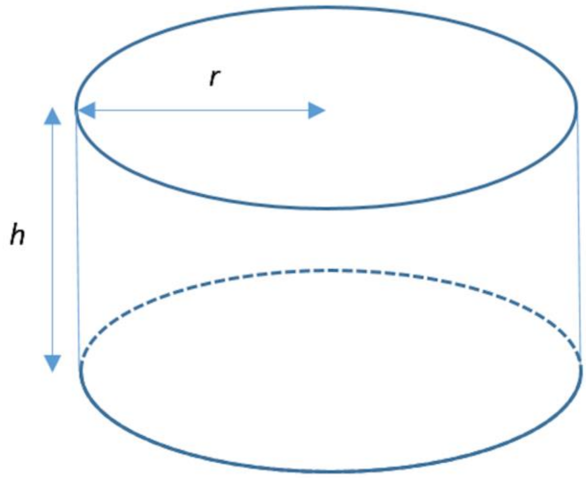
d) (Svær) Gør rede for, at:

$$OA(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}x^2 + 400 \cdot \frac{\sqrt{3}}{x}$$

Hint: Højden af de ligesidede trekanter, som udgør endefladerne, er $h = \frac{\sqrt{3}}{2}x$.

Opgave 6.5

Et firma, der producerer havegrill arbejder på en model, der har form som en cylinder, der er åben i toppen:



Figur 19. Kilde: Tegnet i Paint.

For at minimere omkostningerne er firmaet interesseret i at minimere overfladearealet og således materialeforbruget.

a) Opskriv et udtryk for grillens overfladeareal OA, der afhænger af r og h.

b) Opskriv et udtryk for grillens overfladeareal OA, der kun afhænger af r, når grillens rumfang skal være 6 dm^3.

c) Find den værdi af r, der minimerer overfladearealet OA.

d) Beregn den mindste værdi af overfladearealet OA_{min}.

Opgave 6.6

Et firma skal designe et popcornbæger, der kan rumme 4 liter popcorn, og som har form som en kegle. Da der skal bruges så lidt materiale som muligt, ønsker firmaet at minimere overflade-arealet.

Figur 20. Kilde: www.partypoint.dk

a) Opskriv et udtryk for overfladearealet OA for popcornbægeret, der afhænger af bægerets radius r og højde h.

b) Udtryk h ved r.

c) Opskriv et udtryk for overfladearealet OA for popcornbægeret, der kun afhænger af bægerets radius r.

d) Find den radius r, der giver popcornbægeret det mindste overfladeareal.

e) Beregn det mindste overfladeareal OA_{min}.

Afsluttende opgave

Efter jeres virksomhedsbesøg skal I arbejde med en projektopgave, hvor I skal optimere en bygning.

Hvis virksomheden har givet jer en optimeringsopgave, skal I prøve at komme med en løsning på den:

1) I skal designe en bygning, der lever op til de krav, virksomheden har stillet.

2) I skal fremstille et produktblad, som skal sendes til den virksomhed, I har besøgt. Længere nede er det beskrevet, hvad produktbladet skal indeholde.

Produktblad

I skal fremstille et produktblad for jeres bygning, der skal indeholde følgende:

1) En løsning af optimeringsopgaven herover. I skal præsentere resultaterne på en form, så en ingeniør forstår jeres besvarelse.

2) Præsentation af bygningen:

- Fremstil en skitse (f.eks. i Geogebra i 3 dimensioner), som har de dimensioner, I har regnet jer frem til i optimeringsopgaven. Diskutér bygningens form.
- Fremstil gerne en tegning med flere detaljer.
- Fremstil en tekst, der præsenterer jeres bygning. Her skal I lægge vægt på, at bygningen har dimensioner, der bidrager mindre til CO_2-udslip end andre bygninger med samme gulvareal.

3) Jeres produktblad skal være ”lækkert”, så det kan være med til at sælge konceptet for virksomheden. I bestemmer selv i hvilken rækkefølge I vil præsentere de forskellige elementer.

Hvis ikke virksomheden har mulighed for at stille jer en opgave, kan I i stedet løse den alternative optimeringsopgave, der er på næste side😊

Introduktion til opgaven

Bygninger står for 40 pct. af Danmarks samlede energiforbrug.

En stor del af energiforbruget går til opvarmning af vores bygninger. Varmen skal være tilpas, så vi hverken fryser derhjemme eller på skolen. Mister vi varme, skal der tilføres ny varme.

Ingeniører designer således bygningerne, så de har så lille et varmetab som muligt, hvilket medfører, at der skal tilføjes så lidt ny varme som muligt.

Varme vil gradvist komme ud af bygningen til det fri gennem bygningens overflade (f.eks. vægge, tage, vinduer etc.). Jo større overflade, jo mere varme kan slippe ud. For at minimere varmeoverførslen gennem bygningens overflade, bør bygningens form principielt være så kompakt som muligt.

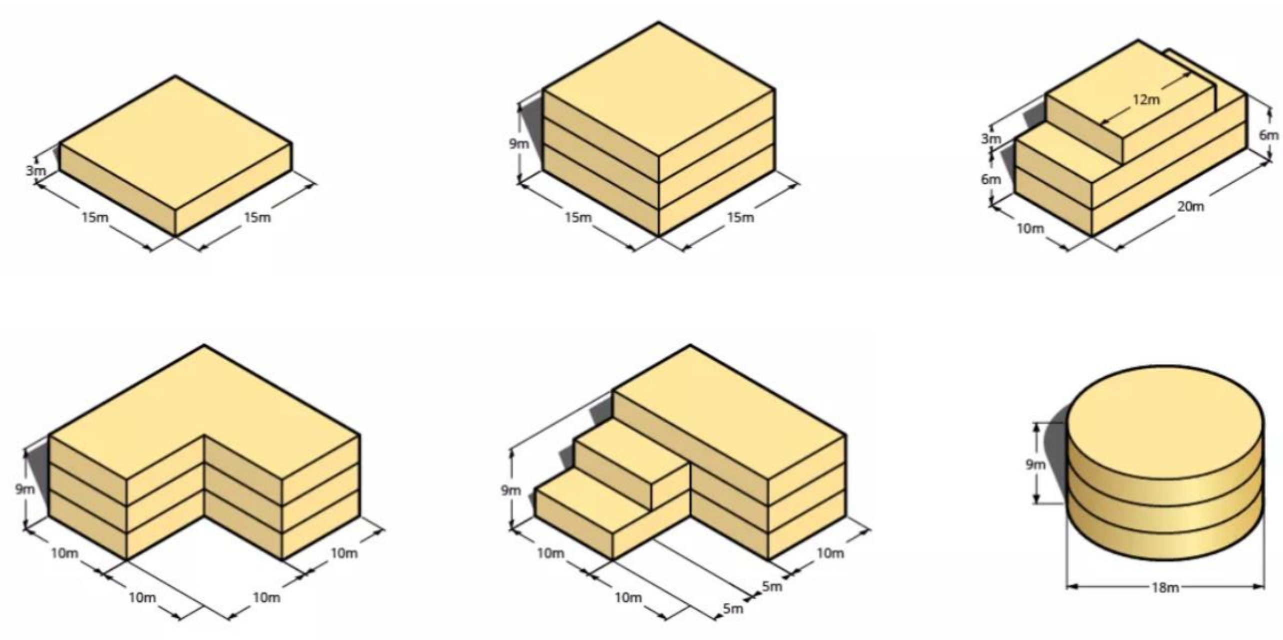
Sammenligning af energieffektiviteten ved forskellige design skal helst set ske i den tidlige designfase af bygningerne. Dette arbejde er meget vigtigt for de ingeniører, som designer bygningen.

Energibesparelser i en bygning er vigtige af flere årsager. Det bestemmer bygningens værdi. Folk foretrækker energieffektive bygninger, fordi de har lavere driftsomkostninger. Sidst, men ikke mindst, bidrager energieffektive bygninger til et bedre og mere bæredygtigt miljø.

Vi skal altså designe vores bygninger, så vi får mest muligt volumen inden for, samtidig med at vi har mindst muligt overfladeareal, hvor vi mister varme.

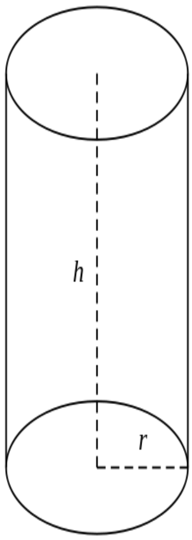
Dette kan løses ved at se på forskellige geometrier og udformninger af bygninger.

Her er et par eksempler:



Ved at bruge matematikken til at optimere designet af vores bygninger, kan vi reducere energi-forbruget til opvarmning og dermed bidrage til et mere bæredygtigt samfund.

Opgave: Energioptimering af en cylinderformet bygning



Figur: Bygningen skal have form som en cylinder

Figur: Hotel i Atlanta, USA (Wikipedia)

I skal fremstille en cylinderformet bygning, og den kan godt have flere etager. Vi er interesseret i at finde frem til, hvilket antal etager der giver det mindste overfladeareal, hvis vi gerne vil have et bestemt gulvareal i bygningen.

Vi antager, at der i alt er 3 m mellem hver etage.

Vi antager, at det samlede gulvareal i bygningen skal være 1000 m^2.

a) Find en funktion, der giver det samlede overfladeareal af bygningen. Her skal ydervæggen og loftet regnes med. I skal finde frem til en funktion, der afhænger af de to variable h og r, som ses på figuren herover.

b) Find en funktion, der beregner det samlede gulvareal i bygningen. I skal finde frem til en funktion, der afhænger af variablen h, som ses på figuren herover (hint: I får variablen h med i funktionen ved at tænke ind, at der er flere etager i bygningen).

c) Brug funktionen, I fandt i opgave b), til at fjerne variablen r i funktionen, der beregner overfladearealet af bygningen. Herved skal I gerne nå frem til en funktion, der beregner bygningens overfladeareal, og som kun afhænger af variablen h.

d) Undersøg nu, hvilken højde af bygningen der giver det mindste overfladeareal.

e) Hvor mange etager vil der være i bygningen, når den har den højde, I fandt i opgave d)?

f) I har sikker fundet, at din højde af bygningen ikke giver et helt antal etager. Overvej, hvilken betydning det har for dit resultat.